Teoria das Categorias — notas sobre adjunções

Pedro Resende

Maio de 2005

1 Definições e propriedades básicas

Em muitos exemplos de setas universais dum objecto x para um functor $S : D \to C$ (por exemplo a injecção de geradores do grupo livre gerado por um conjunto) não há nenhuma restrição resultante do objecto x que em particular se considera; isto é, para qualquer objecto x de C existe uma seta universal para S. Uma tal situação está longe de se verificar sempre (exemplos naturais desta situação surgem ao estudar a noção de limite) e conduz a uma das várias definições possíveis da noção de adjunção:

Definição 1.1 Sejam C e D categorias. Uma *adjunção* de C para D consiste de um functor $G : D \to C$ e de, para cada objecto x de C, uma seta universal $(\overline{x}, \eta_x)$ de x para G.

Esta definição não é a mais habitual, mas é frequentemente na prática muito útil quando se pretende provar que existe uma determinada adjunção. Daqui por diante manteremos a notação da definição anterior.

Em virtude da equivalência entre setas universais e functores representáveis, cada seta universal $(\overline{x}, \eta_x)$ é "o mesmo que" uma bijecção natural

$$\varphi_x : \hom_D(\overline{x}, -) \overset{\cong}{\Rightarrow} \hom_C(x, G(-)) \ , \tag{1}$$

onde a relação entre η_x, $\overline{x}$ e φ_x é expressa por qualquer uma das seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} \eta_x &= \varphi_{x\overline{x}}(\mathrm{id}_{\overline{x}}) \\ \varphi_x &= \eta_x^* \circ G \\ \varphi_{xy}(g) &= G(g) \circ \eta_x \qquad (\text{se } g : Fx \to y) \ . \end{aligned}$$

Usaremos sempre a notação φ_x com este significado e escreveremos φ_{xy} (em vez de, por exemplo, $(\varphi_x)_y$) para a componente y da transformação natural φ_x.

2 Functores adjuntos e unidade duma adjunção

Proposição 2.1 *Dada uma adjunção de C para D existe um (e um só) functor $F : C \to D$ tal que $Fx = \overline{x}$ para cada objecto x de C e tal que a família $\{\eta_x\}$ é uma transformação natural $\eta : \mathrm{id}_C \Rightarrow G \circ F$.*

Proof. Nos objectos definimos o functor F pela condição que é imposta no enunciado:

$$Fx = \overline{x} \ .$$

Seja agora $f : x \to y$ uma seta. Obtemos então um diagrama

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\eta_y \circ f"] & GFx \\ y \arrow[r, "\eta_y"] & GFy \end{tikzcd}$$

Uma vez que (Fx, η_x) é uma seta universal de x para G, existe uma e uma só seta $\overline{f} : Fx \to Fy$ tal que $G\overline{f} \circ \eta_x = \eta_y \circ f$. Definimos então

$$Ff = \overline{f} \ .$$

Resulta desta definição que, se F for de facto um functor (i.e., se preservar as identidades e a composição) então a família de setas η_x define uma transformação natural

$$\eta : \mathrm{id}_C \Rightarrow G \circ F \ ,$$

uma vez que devido à definição de F todos os quadrados

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "f"'] & GFx \arrow[d, "GFf"] \\ y \arrow[r, "\eta_y"] & GFy \end{tikzcd}$$

são comutativos. Vamos então verificar que F é de facto um functor. Se $f = \mathrm{id}_x$ então Ff tem de ser igual a id_{Fx} porque esta última seta faz comutar o quadrado acima (porque G é um functor e portanto preserva identidades) e por isso, devido à unicidade das setas com esta propriedade, Ff tem de coincidir com id_{Fx}. Para provar que F preserva composições o raciocínio é análogo. Dadas duas setas f e g como no diagrama seguinte,

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "f"'] & GFx \arrow[d, "GFf"] \\ y \arrow[r, "\eta_y"] \arrow[d, "g"'] & GFy \arrow[d, "GFg"] \\ z \arrow[r, "\eta_z"] & GFz \end{tikzcd}$$

tanto o quadrado de cima como o de baixo são comutativos, pelo que o rectângulo exterior também é. Uma vez que G é um functor, tem-se $GFg \circ GFf = G(Fg \circ Ff)$ e portanto a seta $Fg \circ Ff$ tem de ser a única seta h de Fx para Fz tal que $Gh \circ \eta_x = \eta_z \circ (g \circ f)$. Mas então tem de coincidir com $F(g \circ f)$, o que mostra que F é um functor. ∎

Definição 2.2 • Dizemos que o functor F da proposição anterior é o *adjunto esquerdo* da adjunção e que G é o *adjunto direito*.

- A transformação natural η é a *unidade* da adjunção.
- Diz-se que um functor G *tem um adjunto esquerdo* se existe uma adjunção da qual G é o adjunto direito e que um functor F *tem um adjunto direito* se existe uma adjunção da qual F é o adjunto esquerdo.
- Usa-se a notação $F \dashv G$ para indicar que F é adjunto esquerdo de G.

Considere-se a componente φ_{xy} da bijecção natural φ_x de (1):

$$\varphi_{xy} : \hom_D(Fx, y) \to \hom_C(x, Gy) \ .$$

Para cada y fixo obtemos uma família de bijecções indexada pela variável x. Esta define uma bijecção natural

$$\varphi_{(-)y} : \hom_D(F(-), y) \overset{\cong}{\Rightarrow} \hom_C(-, Gy)$$

cuja naturalidade é na verdade equivalente à naturalidade de η, pela seguinte proposição:

Proposição 2.3 *Considerem-se functores*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "F"] & D \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

e uma família de setas $\alpha_x : x \to GFx$ (não necessariamente universais) indexada pelos objectos x de C. Considere-se, também, para cada objecto x de C, a transformação natural

$$\psi_x : \hom_D(Fx, -) \Rightarrow \hom_C(x, G(-))$$

definida pela condição

$$\psi_{x,Fx}(\mathrm{id}_{Fx}) = \alpha_x \ .$$

(Portanto tem-se $\psi_{xy}(f) = Gf \circ \alpha_x$.) Então a família (α_x) é uma transformação natural

$$\alpha : \mathrm{id}_C \Rightarrow G \circ F$$

se e só se para cada objecto y de D a família de funções (indexada por x)

$$\psi_{xy} : \hom_D(Fx, y) \to \hom_C(x, Gy)$$

é uma transformação natural

$$\psi_{-y} : \hom_D(F(-), y) \Rightarrow \hom_C(-, Gy) \ .$$

Proof. Seja $f : x' \to x$ uma seta de C. Para cada y a naturalidade de ψ_{-y} corresponde à comutatividade do seguinte diagrama genérico:

$$\begin{tikzcd}
\hom_D(Fx, y) \arrow[r, "\psi_{xy}"] \arrow[d, "(Ff)^*"'] & \hom_C(x, Gy) \arrow[d, "f^*"] \\
\hom_D(Fx', y) \arrow[r, "\psi_{x'y}"] & \hom_C(x', Gy)
\end{tikzcd}$$

Portanto todos os ψ_{-y} são transformações naturais se e só se para cada $f : x' \to x$ o seguinte diagrama de transformações naturais (onde a naturalidade é novamente na variável y) for comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\hom_D(Fx, -) \arrow[r, Rightarrow, "\psi_x"] \arrow[d, Rightarrow, "(Ff)^*"'] & \hom_C(x, G(-)) \arrow[d, Rightarrow, "f^*"] \\
\hom_D(Fx', -) \arrow[r, Rightarrow, "\psi_{x'}"] & \hom_C(x', G(-))
\end{tikzcd}$$

Pelo lema de Yoneda ambos os caminhos no diagrama são totalmente determinados pelo valor que é atribuído à identidade id_{Fx}, pelo que a naturalidade é equivalente à comutatividade seguinte:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{Fx} \arrow[rr, mapsto, "\psi_{x,Fx}"] \arrow[dd, mapsto, "(Ff)^*"'] & & \alpha_x \arrow[d, mapsto, "f^*"] \\
& & \alpha_x \circ f \arrow[dl, equal] \\
Ff \arrow[r, mapsto, "\psi_{x',Fx}"] & GFf \circ \alpha_{x'} &
\end{tikzcd}$$

Ou seja, ψ_{-y} é uma transformação natural para todos os valores de y se e só se tivermos

$$\alpha_x \circ f = GFf \circ \alpha_{x'} \ ,$$

o que é precisamente a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} x' \arrow[r, "\alpha_{x'}"] \arrow[d, "f"'] & GFx' \arrow[d, "GFf"] \\ x \arrow[r, "\alpha_x"] & GFx \end{tikzcd}$$

que define (uma vez que f é uma seta arbitrária) a naturalidade de α. ∎

Esta última observação conduz à definição mais usual de adjunção, que é expressa pela seguinte proposição:

Corolário 2.4 *Uma adjunção de C para D consiste de functores*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "F"] & D \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

e de uma família de bijecções (indexada por objectos de $C \times D$)

$$\varphi_{xy} : \hom_D(Fx, y) \to \hom_C(x, Gy)$$

natural em ambas as variáveis x e y.

Esta formulação da noção de adjunção põe em evidência uma simetria que não era evidente na definição do início deste capítulo. Em particular, torna imediato que duma adjunção de C para D com $F \dashv G$, expressa pela bijecção natural

$$\varphi_{xy} : \hom_D(Fx, y) \to \hom_C(x, Gy) \ ,$$

se obtém uma adjunção de D^{op} para C^{op} com $G \dashv F$, expressa pela bijecção natural

$$\varphi_{xy}^{-1} : \hom_{C^{\mathrm{op}}}(Gy, x) \to \hom_{D^{\mathrm{op}}}(y, Fx) \ .$$

A origem da terminologia "adjunto esquerdo" e "adjunto direito" vem desta formulação, pois se $F \dashv G$ então F e G surgem respectivamente à esquerda e à direita (da vírgula) em $\hom_D(Fx, y)$ e $\hom_C(x, Gy)$.

Exemplo 2.5 Sejam P e Q conjuntos pré-ordenados, cujas ordens são ambas denotadas por $\sqsubseteq$. Uma adjunção entre P e Q consiste de um par de funções monótonas

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, bend left, "f"] & Q \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

tais que para quaisquer $x \in P$ e $y \in Q$ se tem

$$f(x) \sqsubseteq y \iff x \sqsubseteq g(y) . \tag{2}$$

(Neste caso as condições de naturalidade são todas triviais.)

A existência da unidade da adjunção implica que para qualquer $x \in P$ se tem $x \sqsubseteq g(f(x))$. (Exercício: derive esta condição directamente a partir da condição (2).)

3 Co-unidade e igualdades triangulares

Outro aspecto que resulta imediatamente desta formulação é que a transformação natural inversa φ^{-1} também é totalmente determinada, pelo lema de Yoneda, pelo valor atribuído à identidade id_{Gy}, que é uma seta

$$\epsilon_y : FGy \to y$$

e define uma transformação natural

$$\epsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_D,$$

cuja naturalidade é equivalente, por razões análogas às da Proposição 2.3, à naturalidade de φ_{xy} em y. (Uma forma equivalente de ver isto é estudar a adjunção de D^{op} para C^{op} com $G \vdash F$, para a qual a unidade é ϵ.)

Definição 3.1 Considere-se uma adjunção de C para D definida pela bijecção natural

$$\varphi_{xy} : \hom_D(Fx, y) \to \hom_C(x, Gy) .$$

A *co-unidade* da adjunção é a transformação natural

$$\epsilon : F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_D$$

que é definida por qualquer uma das seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \varphi^{-1}_{Gy,y}(\mathrm{id}_{Gy}) \\ \varphi^{-1}_{(-)y} &= (\epsilon_y)_* \circ F \\ \varphi^{-1}_{xy}(f) &= \epsilon_y \circ F(f) \qquad (\text{se } f : x \to Gy) . \end{aligned}$$

Exemplo 3.2

1. Qualquer grupo é um quociente dum grupo livre, onde o quociente é dado pela co-unidade da adjunção entre conjuntos e grupos:

$$\begin{tikzcd} UG \arrow[r, "\eta U"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & UFUG \arrow[d, "U\epsilon"] \\ & UG \end{tikzcd}$$

2. A adjunção entre grupos e grupos abelianos que a cada grupo G faz corresponder $G/[G,G]$ tem como co-unidade um isomorfismo natural. Isto exprime o facto de que se A é um grupo abeliano então $A/[A,A] \cong A$.

3. Voltando ao exemplo da adjunção entre pré-ordens,

$$f(x) \sqsubseteq y \iff x \sqsubseteq g(y) \; ,$$

a existência da co-unidade significa que para qualquer y se tem

$$f(g(y)) \sqsubseteq y \; .$$

(Exercício: derive esta desigualdade directamente.)

É claro que cada par (Gy, ϵ_y) é uma seta universal (no sentido dual do que temos visto até aqui, i.e., é um objecto final da categoria de setas $G \downarrow y$) cuja propriedade universal pode ser descrita da seguinte forma: para cada objecto x de C e cada seta $f : Fx \to y$ de D existe uma e uma só seta $\overline{f} : x \to Gy$ de C tal que $\epsilon_y \circ F(\overline{f}) = f$. Esta situação é expressa pelos seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd} Gy \\ x \arrow[u, dotted, "\overline{f}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FGy \arrow[r, "\epsilon_y"] & y \\ Fx \arrow[u, "F(\overline{f})"] \arrow[ur, "f"'] \end{tikzcd}$$

É imediato que é possível definir a noção de adjunção dum modo dual do anterior, em termos da co-unidade em vez da unidade. Por outras palavras, uma adjunção de C para D é totalmente definida por um functor $F : C \to D$ (o adjunto esquerdo) e uma família de setas universais $\epsilon_y : FGy \to y$, sendo o adjunto direito e a unidade determinados de forma única por F e pela família $\{\epsilon_y\}$.

(Exercício: enuncie e prove directamente as proposições “duais” das primeiras duas proposições deste capítulo.)

Exemplo 3.3 Algumas adjunções são mais naturalmente definidas em termos da co-unidade do que da unidade. Por exemplo, temos

$$(-) \times Y \dashv (-)^Y$$

em Set: verificando que o produto cartesiano define um functor em Set, a forma mais fácil de mostrar que este functor tem um adjunto esquerdo é mostrar que para cada conjunto Z a função de "avaliação" $\epsilon_Z : Z^Y \times Y \to Z$ que a cada par (f, y) faz corresponder $f(y)$ é uma seta universal, sendo portanto a co-unidade da adjunção pretendida (exercício: verifique).

No exemplo 3.2, ao calcular a co-unidade duma adjunção, recorreu-se a um diagrama da forma

$$\begin{tikzcd} Gy \arrow[r, "\eta_{Gy}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & GFGy \arrow[d, "G\epsilon_y"] \\ & Gy \end{tikzcd}$$

Dualmente, tem-se

$$\begin{tikzcd} FGFx \arrow[r, "\epsilon_{Fx}"] & Fx \\ Fx \arrow[u, "F\eta_x"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

e daqui resultam duas condições imediatas que a unidade e a co-unidade duma adjunção devem satisfazer:

$$\begin{aligned} G\epsilon \cdot \eta G &= \mathrm{id} \\ \epsilon F \cdot F\eta &= \mathrm{id}\,. \end{aligned}$$

Estas são expressas pelos seguintes diagramas e que, em virtude da forma, são conhecidos pelo nome de *igualdades triangulares*:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, Rightarrow, "\eta G"] \arrow[dr, equal] & GFG \arrow[d, Rightarrow, "G\epsilon"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FGF \arrow[r, Rightarrow, "\epsilon F"] & F \\ F \arrow[u, Rightarrow, "F\eta"] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd}$$

Na verdade é possível definir a noção de adjunção recorrendo directamente à unidade e à co-unidade e às igualdades triangulares, conforme resulta da seguinte proposição.

Proposição 3.4 *Considerem-se os functores*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "F"] & D \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

e duas transformações naturais

$$\begin{aligned}\eta &: \mathrm{id}_C \Rightarrow G \circ F \\ \epsilon &: F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}_D\ .\end{aligned}$$

Então F e G são os functores adjunto esquerdo e direito, respectivamente, duma adjunção na qual η e ϵ são respectivamente a unidade e a co-unidade, se e só se η e ϵ satisfazem as igualdades triangulares.

Proof. Pelo lema de Yoneda existe uma e uma só transformação natural (em y)

$$\varphi_{xy} : \hom(Fx, y) \Rightarrow \hom(x, Gy)$$

tal que $\varphi_{x,Fx}(\mathrm{id}_{Fx}) = \eta_x$ para qualquer objecto x de C. Além disso φ é também natural em x porque η é uma transformação natural, pela Proposição ... Também pelo lema de Yoneda, existe uma e uma só transformação natural (em x)

$$\theta_{xy} : \hom(x, Gy) \Rightarrow \hom(Fx, y)$$

tal que $\theta_{Gy,y}(\mathrm{id}_{Gy}) = \epsilon_y$ para cada objecto y de D. Além disso, θ é também natural em y porque ϵ é uma trsnaformação natural. Temos assim duas transformações naturais em x e y, nomeadamente φ e θ. Calculemos $\theta \cdot \varphi$. Da naturalidade em y resulta, pelo lema de Yoneda, que basta calcular o resultado desta composição num ponto, nomeadamente uma identidade:

$$\theta_{x,Fx}(\varphi_{x,Fx}(\mathrm{id}_{Fx})) = \theta_{x,Fx}(\eta_x) = \epsilon_{Fx} \circ F(\eta_x)\ .$$

Daqui resulta que, para cada objecto x de C, se tem $(\theta \cdot \varphi)_{x,Fx}(\mathrm{id}_{Fx}) = \mathrm{id}_{Fx}$ se e só se

$$\epsilon_{Fx} \circ F(\eta_x) = \mathrm{id}_{Fx}\ .$$

Portanto tem-se $\theta \cdot \varphi = \mathrm{id}$ se e só se se verifica a igualdade triangular

$$\epsilon F \cdot F\eta = \mathrm{id}_F\ .$$

De igual modo, novamente pelo lema de Yoneda mas agora recorrendo à naturalidade de $\varphi \cdot \theta$ em x, se conclui que a outra igualdade triangular é equivalente à condição $\varphi \cdot \theta = \mathrm{id}$ e que portanto $\theta = \varphi^{-1}$ se e só se ambas as igualdades triangulares se verificarem. ∎

Exemplo 3.5 Numa adjunção entre pré-ordens com $f \dashv g$ tem-se, devido às igualdades triangulares, $fgf = f$ e $gfg = g$. (Exercício: derivar estas condições directamente.) Em virtude disto resulta que o operador gf é um operador de fecho. Isto é um exemplo elementar de uma *mónada*.

4 Composição de functores adjuntos

Teorema 4.1 *Sejam* (F, G, η, ϵ) *e* $(F', G', \eta', \epsilon')$ *adjunções, com*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "F"] & C' \arrow[l, bend left, "G"] \arrow[r, bend left, "F'"] & C'' \arrow[l, bend left, "G'"] \end{tikzcd}$$

Então $F' \circ F \dashv G \circ G'$.

Proof. Em termos de bijecções naturais podemos compor verticalmente ambas as adjunções e obter assim a adjunção pretendida:

$$\hom_{C''}(F'Fx, y) \cong \hom_{C'}(Fx, G'y) \cong \hom_C(x, GG'y) .$$

A primeira bijecção é natural na "variável" Fx e em y, e portanto é natural em x e y. Do mesmo modo, a segunda bijecção é natural em x e em Gy, e portanto é natural em x e em y. Logo, a composta é uma bijecção natural em x e y. ∎

Exemplo 4.2 Seja K um corpo. A K-álgebra (com unidade) de polinómios num conjunto de variáveis X pode ser obtida como (i) K-espaço linear com base igual ao monóide livre gerado por X e multiplicação determinada por bilinearidade a partir da multiplicação do monóide; (ii) K-álgebra tensorial do espaço linear sobre K de base X. Isto dá-nos duas construções dum functor adjunto esquerdo do functor esquecido da categoria das K-álgebras para Set: a primeira compondo uma adjunção de Set para monóides com uma de monóides para K-álgebras; a segunda compondo uma adjunção de Set para espaços vectoriais com uma de espaços vectoriais para K-álgebras. Como em qualquer dos casos o functor adjunto direito é o mesmo (o functor esquecido de K-álgebras para Set) a K-álgebra obtida por qualquer uma das duas construções é, a menos de isomorfismo, a mesma, uma vez que ambas as construções produzem uma seta universal para o mesmo functor. Na verdade pode ir-se um pouco mais longe: os dois functores adjuntos esquerdos são naturalmente isomorfos. Isto é um facto geral: quaisquer dois adjuntos esquerdos dum mesmo functor adjunto direito são naturalmente isomorfos (v. demonstração no Mac Lane).