Teoria das Categorias

Ficha de exercícios 4

1. Um *bifunctor* das categorias C e D para E é um functor
$$F : C \times D \to E .$$
Justifique que para cada seta $(f, g) : (x, y) \to (x', y')$ de $C \times D$ se tem o seguinte quadrado comutativo em E, onde se convenciona escrever $F(x, g)$ para $F(\mathrm{id}_x, g)$, etc.:
$$\begin{tikzcd} F(x,y) \arrow[r, "F(x,g)"] \arrow[d, "F(f,y)"'] & F(x,y') \arrow[d, "F(f,y')"] \\ F(x',y) \arrow[r, "F(x',g)"'] & F(x',y') \end{tikzcd}$$

2. Mostre que $\hom_C(-,-)$ é um bifunctor $C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$.

3. Mostre que, sendo $F : C \times D \to E$ um bifunctor, para cada objecto x de C há um functor ${}_xF : D \to E$ definido por
$$\begin{aligned} {}_xF(y) &= F(x, y) \\ {}_xF(g) &= F(x, g) \end{aligned}$$
e para cada objecto y de D há um functor $F_y : C \to E$ definido por
$$\begin{aligned} F_y(x) &= F(x, y) \\ F_y(f) &= F(f, y) . \end{aligned}$$

4. Sejam $F, G : C \times D \to E$ bifunctores. Mostre que uma transformação natural $\varphi : F \Rightarrow G$ é o mesmo que uma família de morfismos φ_{xy} indexada pelos objectos (x, y) de $C \times D$ que é "natural em x e em y"; isto é, tal que para cada y fixo a família $(\varphi_{xy})_x$ é uma transformação natural
$$\varphi_{-y} : F_y \Rightarrow G_y$$
e, para cada x fixo, a família $(\varphi_{xy})_y$ é uma transformação natural
$$\varphi_{x-} : {}_xF \Rightarrow {}_xG .$$