

Teoria das Categorias

Ficha de exercícios 5

1. Descreva a co-unidade da adjunção entre Set e Ab cujo adjunto direito é o functor esquecido.
2. Descreva a co-unidade da adjunção entre Grp e Ab cujo adjunto direito é o functor inclusão.
3. Mostre que o functor “produto por X ” $(-) \times X$ (em Set) é adjunto esquerdo do functor exponenciação $(-)^X$. Sugestão: obtenha uma descrição explícita da co-unidade e mostre que assim se obtém uma família de setas (co)-universais.
4. Faça o mesmo para os funtores $(-) \otimes A$ e $\text{hom}(A, -)$ em Ab .
5. Mostre que as adjunções “passam” para as categorias de funtores; isto é, que se $F \dashv G$ então para qualquer categoria J tem-se

$$F^J \dashv G^J$$

onde $F^J(S) = F \circ S$, etc. (Comece por obter uma expressão apropriada para $\sigma^J : S^J \Rightarrow T^J$, dada uma transformação natural $\sigma : S \Rightarrow T$.)

6. Sejam P e Q reticulados completos. Prove que uma função monótona $f : P \rightarrow Q$ tem um adjunto direito se e só se preservar todos os supremos de P .
7. Mostre que as categorias Set^B e Set/B são equivalentes, para qualquer conjunto B (onde Set^B é a categoria dos funtores quando se considera B uma categoria discreta; isto é, é a categoria cujos objectos são as famílias de conjuntos indexadas por B).
8. Mostre que a categoria PFn dos conjuntos e das funções parciais é equivalente a Set_* , a categoria dos conjuntos pontuados.