

# Teoria das Categorias

## Ficha de exercícios 5

1. Descreva a co-unidade da adjunção entre  $\text{Set}$  e  $\text{Ab}$  cujo adjunto direito é o functor esquecido.
2. Descreva a co-unidade da adjunção entre  $\text{Grp}$  e  $\text{Ab}$  cujo adjunto direito é o functor inclusão.
3. Mostre que o functor “produto por  $X$ ”  $(-) \times X$  (em  $\text{Set}$ ) é adjunto esquerdo do functor exponenciação  $(-)^X$ . Sugestão: obtenha uma descrição explícita da co-unidade e mostre que assim se obtém uma família de setas (co)-universais.
4. Faça o mesmo para os funtores  $(-) \otimes A$  e  $\text{hom}(A, -)$  em  $\text{Ab}$ .
5. Mostre que as adjunções “passam” para as categorias de funtores; isto é, que se  $F \dashv G$  então para qualquer categoria  $J$  tem-se

$$F^J \dashv G^J$$

onde  $F^J(S) = F \circ S$ , etc. (Comece por obter uma expressão apropriada para  $\sigma^J : S^J \Rightarrow T^J$ , dada uma transformação natural  $\sigma : S \Rightarrow T$ .)

6. Sejam  $P$  e  $Q$  reticulados completos. Prove que uma função monótona  $f : P \rightarrow Q$  tem um adjunto direito se e só se preservar todos os supremos de  $P$ .
7. Mostre que as categorias  $\text{Set}^B$  e  $\text{Set}/B$  são equivalentes, para qualquer conjunto  $B$  (onde  $\text{Set}^B$  é a categoria dos funtores quando se considera  $B$  uma categoria discreta; isto é, é a categoria cujos objectos são as famílias de conjuntos indexadas por  $B$ ).
8. Mostre que a categoria  $\text{PFn}$  dos conjuntos e das funções parciais é equivalente a  $\text{Set}_*$ , a categoria dos conjuntos pontuados.