Teoria das Categorias

Ficha de exercícios 6

1. Seja C uma categoria cartesiana (i.e., com limites finitos). Um par de setas
$$f, g : R \to X$$
diz-se:

   - uma *relação* se o emparelhamento $\langle f, g\rangle : R \to X \times X$ for mono;
   - *reflexivo* se existir uma seta $r : X \to R$ tal que $fr = gr = 1_X$;
   - *simétrico* se existir uma seta $s : R \to R$ tal que $f = gs$ e $g = fs$;
   - *transitivo* se existir uma seta $t : P \to R$, onde $P = R \times_X R$ é o produto fibrado
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & R \arrow[d, "f"] \\ R \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd} ,$$
   tal que $ft = fp$ e $gt = gq$;
   - uma *relação de equivalência* se respeitar todas as condições anteriores.

   (a) Mostre que uma relação de equivalência é uma categoria interna em C.

   (b) Mostre que se (f, g) é uma relação então as setas s, r e t das condições anteriores, se existirem, são únicas.

   (c) Mostre que qualquer par-núcleo é uma relação de equivalência.

2. Uma relação de equivalência (no sentido do exercício anterior) diz-se *efectiva* se for um par-núcleo. Mostre que:

   (a) se um epimorfismo regular e tiver par-núcleo (f, g) então e é um co-igualador de f e g;

   (b) se uma relação de equivalência efectiva (f, g) tiver um coigualador e então (f, g) é um par-núcleo de e;

   (c) em **Set** qualquer relação de equivalência é efectiva.