Ficha 6

Análise Matemática II

Cursos LESIM & LEIC-Taguspark, 1^o Semestre de 2001/2002

I

1-[5 val] Indique o interior, o exterior, a fronteira e o fecho de cada um dos seguintes conjuntos:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge xy \neq 0\}$;

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\}$;

(c) $C = \{(x, \cos(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}^+\}$.

2-[5 val] Considere a função escalar f definida em $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ por

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}$$

(a) Diga, justificando, se f é contínua no seu domínio D.

(b) Diga, justificando, se f é prolongável por continuidade ao ponto (0,0). Se sim, que valor terá f nesse ponto.

(c) Calcule o gradiente de f no ponto (1,0).

II

(a ser feito em casa)

1-[5 val] (a) Mostre que, para qualquer conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$, o seu interior é um conjunto aberto. Mostre também que, se A é um conjunto aberto contido em X então também está contido no interior de X.

(b) Mostre que, para qualquer conjunto fechado $X \subseteq \mathbb{R}^n$, se (x_n) é uma sucessão convergente com termos em X então o seu limite também pertence a X.

2-[5 val] (a) Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se conexo por arcos se para quaisquer dois elementos p e q de X existe uma função contínua

$$\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$$

tal que $\phi(0) = p$, $\phi(1) = q$ e $\phi(t) \in X$ para todo $t \in [0, 1]$.

Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função contínua então a imagem de qualquer conjunto conexo por arcos é um conjunto conexo por arcos.

(b) Definimos a pré-imagem de um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^m$ pela função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como sendo o conjunto $f^{-1}(X) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in X\}$.

Mostre que se f é contínua então a pré-imagem de um conjunto aberto é aberto.