1^o **Exame**

Análise Matemática II

Cursos LESIM, 1^o Semestre de 2002/2003

Duração: 3 horas

Data: 13/ 01/ 2003

1- [3 val.] Determine uma primitiva para cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$\text{(a)} \quad \frac{\log x}{\sqrt{x}} \qquad \text{(b)} \quad \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$$

2- [4 val.] Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x^{\frac{3}{2}} \wedge 0 \leq x \leq 1\}$$

Esboce o conjunto S e calcule a sua área e o seu perímetro.

3- [3 val.] Considere a função f definida em $]0,+\infty[$ por

$$f(x) = \frac{(5x+1)^{\alpha+\beta}}{x^{\alpha}(1+x^2)^{\beta}(x+1)}$$

(a) Diga, justificando, para que valores reais de α e β é convergente o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

(b) Determine, para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, o valor do integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

4- [4 val.] Considere uma função escalar f definida em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$ pela expressão:

$$f(x,y) = \frac{x^2y\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$$

(a) Indique o interior, o exterior, a fronteira e o fecho de D e diga, justificando, se D é aberto, fechado ou limitado.

(b) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$. Diga, justificando, que valor terá tal prolongamento no ponto $(0,0)$.

(c) Sendo F o prolongamento por continuidade de f no ponto $(0,0)$, determine a derivada de F nesse ponto segundo o vector $(1,1)$.

(d) Diga, justificando, se F é diferenciável ou não no ponto $(0,0)$.

5- [4 val.] Considere a função escalar g definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$g(x,y) = xy(x+y-3)$$

(a) Faça um esboço do conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}.$$

(b) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de g.

(c) Seja ψ uma função real de variável real definida pela expressão

$$\psi(t) = g(\text{sen } t, \cos t)$$

Determine o valor a derivada de g no ponto $t = 0$.

6- [2 val.] Considere uma função h analítica numa vizinhança do ponto $x = 0$ tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $h(h(x)) = x$. Determine a série de MacLaurin da função I definida pela expressão:

$$I(x) = \int_{h(0)}^{h(x)} h(t)dt$$

em função dos coeficientes de série de MacLaurin de h.

Sugestão: determine a derivada de I.