2^o **Exame**

Análise Matemática II

Cursos LESIM, 1^o Semestre de 2002/2003

Duração: 3 horas

Data: 27/ 01/ 2003

1- [4 val.] Determine uma primitiva para cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$\text{(a)} \quad \frac{2x+1}{x^3+x^2} \qquad \text{(b)} \quad \text{arcsen} x$$

2- [4 val.] Considere o conjunto $S_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$S_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{1}{1+e^x} \wedge 0 \leq x \leq \alpha\}$$

(a) Calcule, em função de α, a área do conjunto S_α.

(b) Diga, justificando, se o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x} dx$$

é convergente. Se sim, qual o seu valor?

3- [2 val.] Determine a série de Mac-Laurin da função dada pela expressão:

$$\phi(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$$

e indique o valor de $\phi^{(6)}(0)$.

4- [4 val.] Considere a função escalar f definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Diga, justificando, se f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) Determine as derivadas parciais de f no ponto $(0,0)$.

(c) Determine as funções derivadas parciais de f.

(d) Diga, justificando, se f é diferenciável ou não no ponto $(0,0)$.

5- [4 val.] Considere a função escalar g definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$g(x,y) = y^2 - (x^2-1)^2$$

(a) Faça um esboço do conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \leq 0 \wedge 0 < x < 1\}$$

e indique o seu interior, exterior, fronteira e fecho.

(b) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de g.

6- [2 val.] Considere uma função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. Mostre que, para qualquer intervalo $[a,b]$ existe em $\mathbb{R}^2$ um segmento de recta tangente ao gráfico de h, cujos extremos têm abcissa a e b e com comprimento igual ao comprimento do gráfico de h no intervalo $[a,b]$.

Sugestão: Aplique o teorema de Lagrange à função $\psi(x)$ que a cada x atribui o comprimento do gráfico de h no intervalo $[a,x]$.