1^o **Exame / 2^o Teste**[1]

Análise Matemática II

Cursos LESIM & LEIC-Taguspark, 1^o Semestre de 2001/2002

Duração: 3 horas (exame)/ 1 hora e 30 minutos (teste)

Data: 11/ 01/ 2002

I

1- [3 val.] Determine uma primitiva para cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$\text{(a)} \quad \frac{4x^3 - x^2 + 4x - 2}{(2+x^2)(1+x^2)} \qquad \text{(b)} \quad (1+3x^2)\arctan x.$$

2- [2,5 val.] Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{1-x^2}{1+x^2}\}$$

Esboce o conjunto S e calcule a sua área.

3- [3 val.] (a) Diga, justificando, quais dos seguintes integrais impróprios são convergentes:

$$\text{(i)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^4}dx \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x}dx \qquad \text{(iii)} \int_0^{+\infty} \sqrt{2+\cos x}\,dx$$

(b) Calcule o valor do integral impróprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$$

4- [1,5 val.] Considere uma função f contínua em $\mathbb{R}$, que satisfaz a seguinte igualdade:

$$x^2 f(x) = \int_1^{x^2} (f(\sqrt{t}) - te^t)dt \quad \text{para todo o} \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) Mostre que f é par e diferenciável para $x \neq 0$.

(b) Determine $f(x)$.

[1] O teste consiste apenas no grupo II e as cotações são a dobrar

II

1- [1,5 val.] Seja f uma função real analítica cujo desenvolvimento de Mac-Laurin é uma de entre as seguintes séries de potências

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+2} \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n+1} x^n \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \log(n+1) x^{2n} \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) x^n$$

Indique, justificando, qual destas séries de potências será o desenvolvimento de Mac-Laurin de f, sabendo que f satisfaz as seguintes condições:

I: f possui um mínimo local em $x = 0$.

II: $f''(0) = 2$.

III: O interior do conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}\}$ é vazio.

2- [2,5 val.] Considere a função escalar f definida no conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$ pela expressão

$$f(x,y) = \frac{x^3 y + x y^3}{|xy|}$$

(a) Indique o interior, o exterior, a fronteira e o fecho de D.

(b) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.

3- [2,5 val.] Considere a função escalar g definida em $\mathbb{R}^2$ pela expressão

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Obtenha o gradiente de g no ponto $(0,0)$ e a derivada segundo o vector $(1,2)$ no mesmo ponto.

(b) Diga, justificando, se g é diferenciável ou não no ponto $(0,0)$.

4- [2,5 val.] Considere a função escalar h definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$h(x,y) = 3x^2 y + y^3 - 3y$$

(a) Faça um esboço do conjunto de nível

$$N(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}.$$

(b) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de h.

5- [1 val.] Sejam f e g duas funções escalares diferenciáveis em $a \in \mathbb{R}^n$. Mostre que o produto fg é uma função diferenciável em a e que

$$\nabla(fg)(a) = \nabla f(a)g(a) + f(a)\nabla g(a)$$