2^o **Exame**

Análise Matemática II

Cursos LESIM & LEIC-Taguspark, 1^o Semestre de 2001/2002
Duração: 3 horas
Data: 25/ 01/ 2002

1- [3 val.] Determine uma primitiva para cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$\text{(a)}\quad \frac{1+x^2+x^4}{x^2+x^4} \qquad \text{(b)}\quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$$

2- [2 val.] Diga, justificando, qual o erro no seguinte raciocínio:

$$0 \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=-1}^{x=1} = -2$$

3- [3 val.] Considere a função real φ definida em $\mathbb{R}$ pela expressão:

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{1+e^t}dt$$

(a) Mostre que φ é diferenciável e estritamente crescente.
(b) Determine, caso exista, o valor do limite

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$$

4- [2 val.] Seja f uma função real analítica cujo desenvolvimento de Mac-Laurin é uma de entre as seguintes séries de potências

$$(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{n+1} \quad (b)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!} \quad (c)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \quad (d)\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)x^n$$

Indique, justificando, qual destas séries de potências será o desenvolvimento de Mac-Laurin de f, sabendo que f satisfaz as seguintes condições:

I: f possui um mínimo local em $x = 0$.

II: $f^{(4)}(0) = 12$.

III: O integral impróprio $\int_0^1 \frac{x\sqrt{x}}{f(x)-f(0)}dx$ é convergente.

5- [4 val.] Considere uma função escalar f contínua em $\mathbb{R}^2$ tal que, para $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\arctan(\frac{1}{x^2 + y^2})$$

(a) Mostre que $f(0, 0) = 0$.

(b) Calcule as derivadas parciais de f e estude-as quanto à continuidade em $\mathbb{R}^2$.

(c) Diga, justificando, se f é diferenciável ou não em $\mathbb{R}^2$.

6- [4 val.] Considere a função escalar h definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$h(x, y) = y^2 - 2x^2 + x^4$$

(a) Faça um esboço do conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) \leq 0\}.$$

e determine a sua área.

(b) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de h.

7- [2 val.] (a) Mostre que se um conjunto A é fechado então a sua fronteira tem interior vazio.

(b) Dê um exemplo em $\mathbb{R}$ de um conjunto cuja fronteira tem interior não vazio.