Resolução da Ficha 1A

Análise Matemática II

Curso LEIC-Taguspark, 1^o Semestre de 2002/2003

1-

(a) Primitivando directamente:

$$\int x + 2dx = \int xdx + \int 2dx = \frac{x^2}{2} + 2x$$

(b) Primitivando directamente:

$$\int x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int 2x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sin(x^2)$$

(c) Primitivando directamente:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \arcsin(e^x)$$

(d) Primitivando directamente:

$$\int \frac{1}{x\log x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\log x}dx = \log(|\log x|)$$

2- Se $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ então

$$f(x) = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x + c = \frac{\pi}{2} + c = 0$$

logo

$$c = -\frac{\pi}{2}$$

Portanto

$$f(x) = \arctan x - \frac{\pi}{2}$$

3- Dada uma partição P do intervalo $[a,b]$ temos que a diferença entre as suas somas de Darboux é

$$S(P;f)-s(P;f)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})$$

onde $m_i=\inf\{f(x):x_{i-1}\leq x\leq x_i\}$ e $M_i=\sup\{f(x):x_{i-1}\leq x\leq x_i\}$.

Para além disso, temos a desigualdade:

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})\leq |P|\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)$$

pois $|P|=\min\{x_1-x_0,x_2-x_1,...,x_n-x_{n-1}\}\leq x_i-x_{i-1}$ para qualquer i.

Sendo f uma função decrescente temos que:

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)=\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1})-f(x_i))=f(a)-f(b)$$

Assim

$$S(P;f)-s(P;f)\leq |P|(f(a)-f(b))$$

Como para qualquer $\delta>0$ existe uma partição P tal que $|P|<\frac{\delta}{f(a)-f(b)}$ e portanto $S(P;f)-s(P;f)\leq\delta$, temos que f satisfaz a condição de Riemann, logo é integrável.