Resolução da Ficha 1B

Análise Matemática II

Curso LEIC-Taguspark, 1^o Semestre de 2002/2003

1-

(a) Primitivando directamente:

$$\int \cos(4x)dx = \int \frac{1}{4} 4\cos(4x)dx = \frac{1}{4}\int 4\cos(4x)dx = \frac{1}{4}\sin(4x)$$

(b) Primitivando directamente:

$$\int x^2 + \sqrt[3]{x}dx = \int x^2 + x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}$$

(c) Primitivando directamente:

$$\int \frac{\log x}{x}dx = \int \frac{1}{x}\log x = \frac{(\log x)^2}{2}$$

(d) Primitivando directamente:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}dx = 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}dx = 2\arctan(\sqrt{x})$$

2- Se $f'(x) = 2^x$ então

$$f(x) = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\log 2} + c$$

Como

$$f(0) = 0$$

temos que

$$\frac{2^0}{\log 2} + c = \frac{1}{\log 2} + c = 0$$

logo

$$c = -\frac{1}{\log 2}$$

Portanto

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{\log 2}$$

3- Dada uma partição P do intervalo $[a, b]$ temos que a diferença entre as suas somas de Darboux é

$$S(P;f) - s(P;f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

onde $m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ e $M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$.

Para além disso, temos a desigualdade:

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq |P| \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)$$

pois $|P| = \min\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1}\} \leq x_i - x_{i-1}$ para qualquer i.

Sendo f uma função decrescente temos que:

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) - f(x_i)) = f(a) - f(b)$$

Assim

$$S(P;f) - s(P;f) \leq |P|(f(a) - f(b))$$

Como para qualquer $\delta > 0$ existe uma partição P tal que $|P| < \frac{\delta}{f(a) - f(b)}$ e portanto $S(P;f) - s(P;f) \leq \delta$, temos que f satisfaz a condição de Riemann, logo é integrável.