Resolução da Ficha 2A

Análise Matemática II

Curso LESIM, 1^o Semestre de 2002/2003

1-

(a) Sendo $\frac{4x-8}{x^2(x^2+4)}$ uma fracção racional própria (o grau do numerador é inferior ao grau do denominador) esta pode ser dada como uma soma de fracções simples cujos denominadores dividem o polinómio $x^2(x^2+4)$. Assim

$$\frac{4x-8}{x^4+4x^2} = \frac{4x-8}{x^2(x^2+4)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{A(x^3+4x)+B(x^2+4)+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+4)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+4Ax+4B}{x^2(x^2+4)}$$

onde A, B, C e D são constantes que satisfazem a equação anterior. Ou seja A, B, C e D são soluções do sistema de equações lineares:

$$\left\{\begin{array}{rcr} A+C & = & 0 \\ B+D & = & 0 \\ 4A & = & 4 \\ 4B & = & -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} C & = & -A \\ D & = & -B \\ A & = & 1 \\ B & = & -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ B & = & -2 \\ C & = & -1 \\ D & = & 2 \end{array}\right.$$

Temos, portanto, que:

$$\int \frac{4x-8}{x^4+4x^2}dx = \int \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{x}{x^2+4} + \frac{2}{x^2+4}dx =$$

$$= \log(|x|) + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\log(x^2+4) + \arctan(\frac{x}{2})$$

(b) Primitivando por partes com

$$u' = \frac{x}{(1+x^2)^2} \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

e

$$v = x \quad \Rightarrow \quad v' = 1$$

temos

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} - \int -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\arctan x$$

(c) Primitivando por substituição com $x = \mathrm{sen} t$ (sendo $dx = \cos t dt$) temos que

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t}\cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{\mathrm{sen} 2t}{4} = \frac{t}{2} + \frac{\mathrm{sen} t \cos t}{2} = \frac{t}{2} + \frac{\mathrm{sen} t\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t}}{2} =$$

$$= \frac{\mathrm{arcsen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

2- Sendo f diferenciável, temos que, $e^t f(t) + 1$ é contínua, logo, pelo Teorema Fundamental do Calculo, a função definida por

$$\int_0^x (e^t f(t) + 1)dt$$

é diferenciável e a sua derivada é

$$e^x f(x) + 1$$

Assim, derivando a igualdade

$$e^x f(x) = \int_0^x (e^t f(t) + 1)dt$$

obtemos

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x f(x) + 1$$

donde tiramos

$$f'(x) = e^{-x}$$

Portanto, $f(x)$ é uma primitiva de e^{-x}, logo

$$f(x) = -e^{-x} + c$$

sendo c uma constante.

Além disso f satisfaz a igualdade

$$e^x f(x) = \int_0^x (e^t f(t) + 1) dt$$

donde resulta, com $x = 0$, que

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 1$$

Resumindo, a função f é dada por

$$f(x) = -e^{-x} + 1$$