Resolução da Ficha 2B

Análise Matemática II
Curso LESIM, 1º Semestre de 2002/2003

1-

(a) Primitivando por substituição com $x = t^3$ (sendo $dx = 3t^2 dt$) temos que

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1}{1+\sqrt[3]{t^3}}3t^2 dt = \int \frac{3t^2}{1+t}dt = \int 3t - 3 + \frac{3}{t+1}dt =$$

$$= \frac{3t^2}{2} - 3t + 3\log(|t+1|) = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} - 3\sqrt[3]{x} + 3\log(|\sqrt[3]{x}+1|)$$

(b) Sendo $\frac{1+x+3x^2-x^3}{1-x^4}$ uma fracção racional própria (o grau do numerador é inferior ao grau do denominador) esta pode ser dada como uma soma de fracções simples cujos denominadores dividem o polinómio $1 - x^4 = (1-x)(1+x)(1+x^2)$. Assim

$$\frac{1+x+3x^2-x^3}{1-x^4} = \frac{1+x+3x^2-x^3}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x^2} =$$

$$= \frac{A(1+x)(1+x^2) + B(1-x)(1+x^2) + Cx(1-x^2) + D(1-x^2)}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} =$$

onde A, B, C e D são constantes que satisfazem a equação anterior. Substituindo a variável x pelos valores $x = 1$, $x = -1$, $x = 0$ e $x = 2$ nos numeradores de cada lado da igualdade, obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 4 = 4A \\ 4 = 4B \\ 1 = A + B + D \\ 7 = 15A - 5B - 6C - 3D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ D = 1 - A - B \\ C = \frac{1}{6}(15A - 5B - 3D - 7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \\ D = -1 \end{cases}$$

Temos, portanto, que:

$$\int \frac{1+x+3x^2-x^3}{1-x^4}dx = \int \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$= -\log(|1-x|) + \log(|1+x|) + \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \arctan x$$

(c) Primitivando por partes com

$$u' = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{1}{x}$$

e

$$v = \log x \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{1}{x}$$

temos

$$\int \frac{\log x}{x^2} dx = -\frac{\log x}{x} - \int -\frac{1}{x^2} dx =$$

$$= -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}$$

2- Sendo f diferenciável, temos que, $e^t f(t) + 1$ é contínua, logo, pelo Teorema Fundamental do Calculo, a função definida por

$$\int_0^x (e^t f(t) + 1) dt$$

é diferenciável e a sua derivada é

$$e^x f(x) + 1$$

Assim, derivando a igualdade

$$e^x f(x) = \int_0^x (e^t f(t) + 1) dt$$

obtemos

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x f(x) + 1$$

donde tiramos

$$f'(x) = e^{-x}$$

Portanto, $f(x)$ é uma primitiva de e^{-x}, logo

$$f(x) = -e^{-x} + c$$

sendo c uma constante.

Além disso f satisfaz a igualdade

$$e^x f(x) = \int_0^x (e^t f(t) + 1) dt$$

donde resulta, com $x = 0$, que

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 1$$

Resumindo, a função f é dada por

$$f(x) = -e^{-x} + 1$$