Resolução da Ficha 3A

Análise Matemática II

Curso LESIM, 1^o Semestre de 2002/2003

1-

$$0 \leq 4y \leq x^2 - 2\log x \quad \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{1}{4}(x^2 - 2\log x)$$

Seja $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 2\log x)$ $f'(x) = \frac{1}{4}(2x - \frac{2}{x}) = \frac{x - x^{-1}}{2}$ para $1 \leq x \leq e$ temos $f'(x) \geq 0$ logo $f(x) \geq f(1) > 0$

Portanto a área da região

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 4y \leq x^2 - 2\log x \quad \wedge \quad 1 \leq x \leq e\}$$

é dada pelo integral

$$\int_1^e \frac{1}{4}(x^2 - 2\log x)dx = \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x\log x - x}{2}\right]_{x=1}^{x=e} = \frac{e^3 - 1}{12} - \frac{1}{2} = \frac{e^3 - 7}{12}$$

Quanto ao perímetro, este é dado pelo comprimento de três segmentos de recta (unindo os pontos de coordenadas $(1, f(1))$, $(1, 0)$, $(e, 0)$ e $(e, f(e))$ e cujos comprimentos são, respectivamente, $f(1) = \frac{1}{4}$, $e - 1$ e $f(e) = \frac{e^2-2}{4}$) e o comprimento do arco da função f entre os pontos de abcissa $x = 1$ e $x = e$ que é dado pela fórmula

$$\int_1^e \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Sendo

$$f'(x) = \frac{x - x^{-1}}{2}$$

temos que

$$\int_1^e \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{x - x^{-1}}{2}\right)^2}dx = \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x + x^{-1}}{2}\right)^2}dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{\log x}{2}\right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$$

Logo

$$\text{perímetro de } A = \frac{e^2 + 1}{4} + \frac{1}{4} + e - 1 + \frac{e^2 - 2}{4} = \frac{e^2}{2} + e - 1$$

2-

$$\int_2^{+\infty} \frac{2}{x^2-1} dx$$

é um integral impróprio de primeira espécie, sendo

$$\lim_{r \to +\infty} \int_2^r \frac{2}{x^2-1} dx$$

o seu valor (caso este limite existe).

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to+\infty} \int_2^r \tfrac{2}{(x-1)(x+1)} dx &= \lim_{r\to+\infty} \int_2^r (\tfrac{1}{x-1} - \tfrac{1}{x+1}) dx \\
&= \lim_{r\to+\infty} \left[\log(x-1) - \log(x+1)\right]_2^r \\
&= \lim_{r\to+\infty} \left[\tfrac{\log(r-1)}{\log(r+1)} - \tfrac{\log(2-1)}{\log(2+1)}\right] = \log 3
\end{aligned}$$

3- Sendo $\varphi(\theta) = \theta - \text{sen}(\theta)$ uma função bijectiva em $[0, 2\pi]$ com $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(2\pi) = 2\pi$, temos que, θ pode ser dado em função de x (mais precisamente $\theta = \varphi^{-1}(x)$). Deste modo, y pode ser dado em função de x no intervalo $[0, 2\pi]$. E como

$$x = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x \in [0, 2\pi] \Rightarrow \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow y \geq 0$$

a área da região compreendida entre a curva

$$\{(x, y) = (\theta - \text{sen}\theta, 1 - \cos\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$$

e o eixo dos xx é dada pelo integral

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx$$

onde f é a função que define y em função de x.

$$f(x) = y \Leftrightarrow f(\theta - \text{sen}(\theta)) = 1 - cos(\theta)$$

Por substituição de variáveis $x = \varphi(\theta)$ (φ é diferenciável),

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta - sen(\theta))(1 - cos(\theta)) d\theta$$

Como a função f satisfaz a identidade $f(\theta - sen(\theta)) = 1 - cos(\theta)$ no intervalo $[0, 2\pi]$, o integral é igual a

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (1 - cos(\theta))^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} 1 - 2cos(\theta) + cos^2(\theta) d\theta = \\
&= \int_0^{2\pi} 1 - 2cos(\theta) + \tfrac{1}{2} + \tfrac{cos(2\theta)}{2} d\theta = \\
&= [\theta - 2sen(\theta) + \tfrac{\theta}{2} + \tfrac{sen(2\theta)}{4}]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \\
&= 2\pi - 0 + \pi + 0 - (0 - 0 + 0 + 0) = \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$