Resolução da Ficha 3B

Análise Matemática II

Curso LESIM, 1^o Semestre de 2002/2003

1-

$$0 \leq y \leq \log x \quad \Leftrightarrow x \geq 1$$

Portanto a área da região

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \log x \quad \wedge \quad x \leq e\}$$

é dada pelo integral

$$\int_1^e \log x dx = [x \log x - x]_{x=1}^{x=e} = e - e - (-1) = 1$$

Quanto ao perímetro, este é dado pelo comprimento de dois segmentos de recta (unindo os pontos de coordenadas $(1, 0)$, $(e, 0)$ e $(e, f(e))$ e cujos comprimentos são, respectivamente, $e - 1$ e $f(e) = 1$) e o comprimento do arco da função f entre os pontos de abcissa $x = 1$ e $x = e$ que é dado pela fórmula

$$\int_1^e \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Sendo

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

temos que

$$\int_1^e \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = \int_1^e \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx$$

tomando a substituição de variáveis

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow x = \sqrt{y^2 - 1}$$

$$dx = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} dy$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \sqrt{2}$$

$$x = e \Rightarrow y = \sqrt{e^2 + 1}$$

temos que

$$\int_1^e \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} \frac{y^2}{y^2-1}dy = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} 1+\frac{1}{y^2-1}dy = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} 1+\frac{\frac{1}{2}}{y-1}-\frac{\frac{1}{2}}{y-1}dy =$$

$$= \left[y+\frac{1}{2}\log(y-1)-\frac{1}{2}\log(y+1)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} = \left[y+\log(\frac{\sqrt{y^2-1}}{y+1})\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{e^2+1}} =$$

$$= \sqrt{e^2+1}-\sqrt{2}+\log(\frac{e}{\sqrt{e^2+1}+1})-\log(\frac{1}{\sqrt{2}+1})$$

Logo

$$\text{perímetro de } A = \sqrt{e^2+1}-\sqrt{2}+\log(\frac{e}{\sqrt{e^2+1}+1})-\log(\frac{1}{\sqrt{2}+1})+e-1+1$$

2-

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$

é um integral impróprio de segunda espécie em 0, sendo

$$\lim_{s\to 0^+}\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$

o seu valor (caso este limite existe).

$$\lim_{s\to 0^+}\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \lim_{s\to 0^+}\left[2\text{arctg}(\sqrt{x})\right]_s^1 = \lim_{s\to 0^+}[2\text{arctg}(1)-2\text{arctg}(\sqrt{s})] = \frac{\pi}{2}$$

3- Sendo $\varphi(\theta)=\theta-\text{sen}(\theta)$ uma função bijectiva em $[0,2\pi]$ com $\varphi(0)=0$ e $\varphi(2\pi)=2\pi$, temos que, θ pode ser dado em função de x (mais precisamente $\theta=\varphi^{-1}(x)$). Deste modo, y pode ser dado em função de x no intervalo $[0,2\pi]$. E como

$$x=0\Rightarrow\theta=0\Rightarrow y=0$$

$$x=0\Rightarrow\theta=0\Rightarrow y=0$$

$$x\in[0,2\pi]\Rightarrow\theta\in[0,2\pi]\Rightarrow y\geq 0$$

a área da região compreendida entre a curva

$$\{(x,y)=(\theta-\text{sen}\theta,1-\cos\theta):\theta\in[0,2\pi]\}$$

e o eixo dos xx é dada pelo integral

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

onde f é a função que define y em função de x.

$$f(x) = y \Leftrightarrow f(\theta - \mathrm{sen}(\theta)) = 1 - cos(\theta)$$

Por substituição de variáveis $x = \varphi(\theta)$ (φ é diferenciável),

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta - sen(\theta))(1 - cos(\theta))d\theta$$

Como a função f satisfaz a identidade $f(\theta - sen(\theta)) = 1 - cos(\theta)$ no intervalo $[0, 2\pi]$, o integral é igual a

$$\begin{array}{rcl} \int_0^{2\pi}(1-cos(\theta))^2 d\theta & = & \int_0^{2\pi} 1 - 2cos(\theta) + cos^2(\theta)d\theta = \\ & = & \int_0^{2\pi} 1 - 2cos(\theta) + \frac{1}{2} + \frac{cos(2\theta)}{2}d\theta = \\ & = & [\theta - 2sen(\theta) + \frac{\theta}{2} + \frac{sen(2\theta)}{4}]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \\ & = & 2\pi - 0 + \pi + 0 - (0 - 0 + 0 + 0) = \\ & = & 3\pi \end{array}$$