Resolução da Ficha 4A

Análise Matemática II

Curso LESIM, 1^o Semestre de 2002/2003

1- (a)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^3}dx$$

é um integral impróprio misto, sendo convergente se e só se os integrais impróprios

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x^3}dx \quad \text{e} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^3}dx$$

, de segunda e primeira espécie respectivamente, forem convergentes.

$$\frac{1}{\sqrt{x}+x^3} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{quando} \quad x \to 0^+$$

logo, sendo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

convergente,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x^3}dx$$

é convergente.

$$\frac{1}{\sqrt{x}+x^3} \sim \frac{1}{x^3} \quad \text{quando} \quad x \to +\infty$$

logo, sendo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$$

convergente,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^3}dx$$

é convergente.

(b)

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

é um integral impróprio de primeira espécie

$$e^{-x^2} \ll \frac{1}{x^2} \quad \text{quando} \quad x \to +\infty$$

logo, sendo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

convergente,

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

é convergente.

2- (a) Como, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

temos que

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}$$

Portanto,

$$f(x) = e^x + e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k)!} x^{2k}$$

e este desenvolvimento é válido para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\frac{1}{(1-x)^2}$ é a derivada de $\frac{1}{1-x}$. Como, para $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

, temos que

$$g(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = x \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

para $|x| < 1$ (ou seja $x \in]-1, 1[$).

3- Consideremos uma sucessão de funções f_k definida em $[0,1]$ pela expressão:

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se} \quad x = u_n \quad \text{e} \quad n < k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

f_k é identica à função nula excepto num número finito de pontos, logo f_k é integrável em $[0,1]$ e seu o integral é nulo

$$\int_0^1 f_k(x)dx = 0$$

Além disso

$$f(x) - f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se} \quad x = u_n \quad \text{e} \quad n \geq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

pelo que

$$\sup_{x \in [0,1]} |f - f_k| = \frac{1}{k} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty$$

logo f_k converge uniformemente para f no intervalo $[0,1]$.

Assim, pelo Teorema da Convergência Uniforme, $f = \lim f_k$ é integrável em $[0,1]$ e o seu integral é

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim \int_0^1 f_k(x)dx = 0$$