Resolução da Ficha 4B

Análise Matemática II

Curso LESIM, 1^o Semestre de 2002/2003

1- (a)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2} dx$$

é um integral impróprio de primeira espécie

$$\log x \ll \sqrt{x} \quad \text{quando} \quad x \to +\infty$$

pelo que

$$\frac{\log x}{x^2} \ll \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \quad \text{quando} \quad x \to +\infty$$

logo, sendo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$

convergente,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2} dx$$

é convergente.

(b)

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg}(x^2) dx$$

é um integral impróprio de primeira espécie e é divergente pois

$$\operatorname{arctg}(x^2) \to \frac{\pi}{2} \neq 0 \quad \text{quando} \quad x \to +\infty$$

2- (a) $\operatorname{arctg}(x^2)$ é uma primitiva de $\frac{2x}{1+x^4}$. Como, para $|x| < 1$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, temos que

$$\frac{2x}{1+x^4} = 2x \frac{1}{1-(-x^4)} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} (-x^4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^{4n+1}$$

para $|x^4| < 1$ (ou seja $|x| < 1$).

Assim

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x^2) = \operatorname{arctg}(x^2) - \operatorname{arctg}(0) + \operatorname{arctg}(0) = \int_0^x \frac{2t}{1+t^4} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n t^{4n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-$$

e este desenvolvimento é válido para todo o $x \in]-1, 1[$.

(b) Como, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

temos que

$$g(x) = xe^{x+2} = xe^2 e^x = xe^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^2}{(n-1)!} x^n$$

e este desenvolvimento é válido para todo o $x \in \mathbb{R}$.

3- Consideremos uma sucessão de funções f_k definida em $[0, 1]$ pela expressão:

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se} \quad x = u_n \quad \text{e} \quad n < k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

f_k é identica à função nula excepto num número finito de pontos, logo f_k é integrável em $[0, 1]$ e seu o integral é nulo

$$\int_0^1 f_k(x) dx = 0$$

Além disso

$$f(x) - f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se} \quad x = u_n \quad \text{e} \quad n \geq k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

pelo que

$$\sup_{x \in [0,1]} |f - f_k| = \frac{1}{k} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty$$

logo f_k converge uniformemente para f no intervalo $[0, 1]$.

Assim, pelo Teorema da Convergência Uniforme, $f = \lim f_k$ é integrável em $[0, 1]$ e o seu integral é

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim \int_0^1 f_k(x) dx = 0$$