Resolução da Ficha 5A

Análise Matemática II

Curso LESIM, 1^o Semestre de 2002/2003

1- (a)

$intA = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 0 \wedge x^2 + y^2 < 1\}$,

$extA = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0 \vee x^2 + y^2 > 1\}$,

$frontA = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (xy < 0 \wedge x^2+y^2 = 1) \vee (xy = 0 \wedge x^2+y^2 \leq 1)\}$,

$\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b)

$intB = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$,

$extB = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2 \wedge y \neq 1\}$,

$frontB = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \vee (y = 1 \wedge y < x^2)\}$,

$\overline{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \vee y = 1\}$.

2- (a) f é uma função contínua no seu domínio D, pois é uma função racional cujo denominador não se anula no domínio D.

(b) O ponto $(0,0)$ é um ponto aderente ao domínio D, assim f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$ se e só se exite o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{com} \quad (x,y) \in D$$

Como $|f(x,y)| = |\frac{xy^2}{x^4+y^2}| \leq |\frac{xy^2}{y^2}| = |x|$ e $|x| \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$, temos que o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{com} \quad (x,y) \in D$$

existe e é igual a 0. E portanto, o valor de f no ponto $(0,0)$ terá de ser 0.

3- Seja X um conjunto fechado.

$x \in int(frontX) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x;\varepsilon) \subset frontX$ – Por definição de interior.

Como X é fechado, $frontX \subseteq X$. Logo se x pertence ao interior da fronteira de X então existe uma bola centrada em x contida em X, e portanto, por definição de ponto interior, x pertence ao interior de X. Ou seja,

$$int(frontX) \subset intX$$

Por outro lado, o interior de um conjunto está sempre contido nesse conjunto. Logo

$$int(frontX) \subset frontX$$

Sendo assim,

$$int(frontX) \subset intX \cap frontX = \emptyset$$

Pelo que $int(frontX) = \emptyset$.