Resolução da Ficha 5B

Análise Matemática II

Curso LESIM, 1^o Semestre de 2002/2003

1- (a)

$intA = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$,

$extA = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0 \wedge x^2 + y^2 > 1\}$,

$frontA = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x + y = 0 \wedge x^2 + y^2 > 1) \vee \wedge x^2 + y^2 = 1\}$,

$\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \vee x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b)

$intB = \emptyset$,

$extB = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0 \wedge \frac{x^2}{y} \notin \mathbb{N}\}$,

$frontB = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y \neq 0 \wedge \frac{x^2}{y} \in \mathbb{N}) \vee y = 0\}$,

$\overline{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y \neq 0 \wedge \frac{x^2}{y} \in \mathbb{N}) \vee y = 0\}$.

2- (a) f é uma função contínua no seu domínio D, pois é uma função racional cujo denominador não se anula no domínio D.

(b) O ponto $(0,0)$ é um ponto aderente ao domínio D, assim f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$ se e só se exite o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{com} \quad (x,y) \in D$$

Se tomarmos o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende para a origem seguindo a parábola $y = kx^2$, obtemos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=kx^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2kx^2}{x^4 + k^2x^4} = \frac{k}{1+k^2}$$

Temos portanto, que o limite de $f(x,y)$ não é igual para qualquer curva que passe por $(0,0)$. Logo não existe o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{com} \quad (x,y) \in D$$

pelo que f não é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.

3- Seja X um conjunto fechado.

$x \in int(frontX) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x;\varepsilon) \subset frontX$ – Por definição de interior.

Como X é fechado, $frontX \subseteq X$. Logo se x pertence ao interior da fronteira de X então existe uma bola centrada em x contida em X, e portanto, por definição de ponto interior, x pertence ao interior de X. Ou seja,

$$int(frontX) \subset intX$$

Por outro lado, o interior de um conjunto está sempre contido nesse conjunto. Logo

$$int(frontX) \subset frontX$$

Sendo assim,

$$int(frontX) \subset intX \cap frontX = \emptyset$$

Pelo que $int(frontX) = \emptyset$.