Resolução da Ficha 6A

Análise Matemática II

Curso LESIM, 1^o Semestre de 2002/2003

1- (a)[1] Para $(x,y) \neq (0,0)$ f é contínua pois é dada por somas, produtos e composições de funções contínuas.

Para $(x,y) = (0,0)$ f é contínua se e só se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

ou seja

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = 0$$

Como

$$|f(x,y)| = \frac{|x^4 - y^4|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^4}{x^2 + y^2} + \frac{y^4}{x^2 + y^2} \leq x^2 + y^2$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) = 0$$

temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = 0$$

logo f é contínua em $(0,0)$.

Portanto f é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$.

(b)[2]

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2 - 0}{h} = 0$$

[1] Seria mais fácil se observarmos que $\frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = x^2 - y^2$.

[2] idem

(c)[3] Para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x^3(x^2+y^2) - 2x(x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^5+4x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-4y^3(x^2+y^2) - 2y(x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^4y-4x^2y^3-2y^5}{(x^2+y^2)^2} = -2y$$

Assim, atendendo à alínea anterior, temos que as funções derivadas parciais são dadas, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$

(d) Sendo as derivadas parciais contínuas numa vizinhança de $(0,0)$, podemos deduzir que f é diferenciável no ponto $(0,0)$.

(e) Sendo f diferenciável no ponto $(1,1)$ temos que

$$f'_{(1,-1)}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot (1,-1) = (2,-2) \cdot (1,-2) = 4$$

2- Se a função g é diferenciável num ponto (a,b) então g terá de ser contínua nesse ponto.

Se g é contínua no ponto (a,b) então temos necessariamente[4]

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ (x,y)\in\mathbf{Q}^2}} g(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ (x,y)\notin\mathbf{Q}^2}} g(x,y)$$

Como

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ (x,y)\in\mathbf{Q}^2}} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2+y^2 = a^2+b^2$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ (x,y)\notin\mathbf{Q}^2}} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} -x^2-y^2 = -a^2-b^2$$

---

[3]idem

[4]Note-se que qualquer ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pertence quer ao fecho de $\mathbf{Q}^2$ quer ao fecho do seu complementar, pelo que os limites estão bem definidos.

e

$$a^2 + b^2 = -a^2 - b^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow (a, b) = (0, 0)$$

temos que g é diferenciável quanto muito em $(0, 0)$.

Sabemos que g é diferenciável em $(0, 0)$ se e só se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x, y) - g(0, 0) - \nabla g(0, 0) \cdot (x, y)}{\|(x, y)\|} = 0$$

Atendendo que

$$\left|\frac{g(h, 0) - g(0, 0)}{h}\right| = \left|\frac{g(0, h) - g(0, 0)}{h}\right| = |h|$$

temos que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h, 0) - g(0, 0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0, h) - g(0, 0)}{h} = 0$$

Sendo $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x, y) - g(0, 0) - \nabla g(0, 0) \cdot (x, y)}{\|(x, y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x, y)}{\|(x, y)\|}$$

e como

$$\frac{|g(x, y)|}{\|(x, y)\|} = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0 \quad \text{quando} \quad (x, y) \to (0, 0)$$

podemos concluir que g é diferenciável no ponto $(0, 0)$.