Resolução da Ficha 6B

Análise Matemática II

Curso LESIM, 1^o Semestre de 2002/2003

1- (a) Para $(x,y) \neq (0,0)$, f é contínua pois é dada por somas, produtos e composições de funções contínuas.

Para $(x,y) = (0,0)$ f é contínua se e só se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

ou seja

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

Como

$$|f(x,y)| = \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2|y|}{x^2} = |y|$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$$

temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

logo f é contínua em $(0,0)$.

Portanto f é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$.

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

(c) Para $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2)-2x(x^2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2)-2y(x^2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Assim, atendendo à alínea anterior, temos que as funções derivadas parciais são dadas, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \begin{cases} \frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(d) Por definição,

$$f_{(1,1)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{2h^2}}{h} = \frac{1}{2}$$

(e) Se f fosse diferenciável no ponto $(0,0)$ temos que

$$f'_{(1,1)}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot (1,1)$$

Como, pela alínea (b), $\nabla f(0,0) = (0,0)$ teríamos que $f'_{(1,1)}(0,0) = 0$ o que contradiz o resultado da alínea (d). Assim podemos deduzir que f não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

2- Se a função g é diferenciável num ponto (a,b) então g terá de ser contínua nesse ponto.

Se g é contínua no ponto (a,b) então temos necessariamente[1]

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in\mathbf{Q}^2}} g(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\notin\mathbf{Q}^2}} g(x,y)$$

Como

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in\mathbf{Q}^2}} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} x^2+y^2+1 = a^2+b^2+1$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\notin\mathbf{Q}^2}} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} 2x = 2a$$

e

$$a^2+b^2+1 = 2a \Leftrightarrow (a-1)^2+b^2 = 0 \Leftrightarrow (a,b) = (1,0)$$

[1] Note-se que qualquer ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pertence quer ao fecho de $\mathbf{Q}^2$ quer ao fecho do seu complementar, pelo que os limites estão bem definidos.

temos que g é diferenciável quanto muito em $(1,0)$.

Sabemos que g é diferenciável em $(1,0)$ se e só se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(1+x,y)-g(1,0)-\nabla g(1,0)\cdot(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$$

Atendendo que

$$\frac{2h}{h} \leq \frac{g(1+h,0)-g(1,0)}{h} \leq \frac{h^2+2h}{h}$$

e

$$0 \leq \frac{g(1,h)-g(1,0)}{h} \leq \frac{h^2}{h}$$

temos que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(1+h,0)-g(1,0)}{h} = 2$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(1,h)-g(1,0)}{h} = 0$$

Sendo $\nabla g(1,0) = (2,0)$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(1+x,y)-g(1,0)-\nabla g(1,0)\cdot(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(1+x,y)-2-2x}{\|(x,y)\|}$$

e como

$$0 \leq \frac{g(1+x,y)-2-2x}{\|(x,y)\|} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \quad \text{quando} \quad (x,y)\to(0,0)$$

podemos concluir que g é diferenciável no ponto $(0,0)$.