Resolução da Ficha 1

Análise Matemática II

Curso LEIC-Taguspark, 1^o Semestre de 2001/2002

I-

(a) Primitivando directamente:

$$\int cos(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int 3cos(3x+1)dx = \frac{1}{3}sen(3x+1)$$

(b) Primitivando directamente:

$$\begin{aligned}
\int \tfrac{x^2}{x^6+1}dx &= \int \tfrac{x^2}{(x^3)^2+1}dx = \\
&= \tfrac{1}{3}\int \tfrac{3x^2}{(x^3)^2+1}dx = \\
&= \tfrac{1}{3}arctg(x^3)
\end{aligned}$$

(c) Primitivando directamente:

$$\int sen(x)sen(2x)dx = \int sen(x)(2sen(x)cos(x))dx = 2\int sen^2(x)cos(x)dx = \frac{2}{3}sen^3(x)$$

ou primitivando por partes:

$$\begin{aligned}
\int sen(x)sen(2x)dx &= -cos(x)sen(2x) - \int -cos(x)2cos(2x)dx = \\
&= -cos(x)sen(2x) + 2\int cos(x)cos(2x)dx = \\
&= -cos(x)sen(2x) + 2[sen(x)cos(2x) - \int sen(x)(-2sen(2x))dx] = \\
&= -cos(x)sen(2x) + 2sen(x)cos(2x) + 4\int sen(x)sen(2x)dx
\end{aligned}$$

donde se conclui que

$$\int sen(x)sen(2x)dx = \frac{1}{3}(cos(x)sen(2x) - 2sen(x)cos(2x))$$

(d) Primitivando por partes

$$\begin{aligned}
\int xlog(x)dx &= \tfrac{x^2}{2}log(x) - \int \tfrac{x^2}{2}\tfrac{1}{x}dx = \\
&= \tfrac{x^2}{2}log(x) - \int \tfrac{x}{2}dx = \\
&= \tfrac{x^2}{2}log(x) - \tfrac{x^2}{4}
\end{aligned}$$

(e) Primitivando por partes

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x} arctg(\sqrt{x})dx &= \frac{2(x)^{\frac{3}{2}}}{3} arctg(\sqrt{x}) - \int \frac{2(x)^{\frac{3}{2}}}{3} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}^2} dx = \\
&= \frac{2\sqrt{x}^3}{3} arctg(\sqrt{x}) - \frac{1}{3} \int \frac{x}{1+x} dx = \\
&= \frac{2\sqrt{x}^3}{3} arctg(\sqrt{x}) - \frac{1}{3} \int 1 - \frac{1}{1+x} dx = \\
&= \frac{2\sqrt{x}^3}{3} arctg(\sqrt{x}) - \frac{x}{3} - \frac{1}{3} log(|1+x|)
\end{aligned}$$

II-

1- Primitivando $xf'(x)$ por partes obtemos:

$$\int xf'(x)dx = xf(x) - \int f(x)dx$$

ou seja

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx.$$

Por outro lado, substituindo x por $f'(f(x))$, tiramos que

$$\int xf'(x)dx = \int f'(f(x))f'(x)dx = f(f(x))$$

pelo que

$$\int f(x)dx = xf(x) - f(f(x))$$

2-

(a) Por definição a soma de Darboux inferior é

$$s(P_n; f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

e a soma de Darboux superior é

$$S(P_n; f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

onde $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ é a partição $m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$ e $M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$.

Neste caso $x_i = \frac{i}{n}$, $m_i = \inf\{x : \frac{i-1}{n} \le x \le \frac{i}{n}\} = \frac{i-1}{n}$ e $M_i = \sup\{x : \frac{i-1}{n} \le x \le \frac{i}{n}\} = \frac{i}{n}$.

Portanto, temos que

$$s(P_n; f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n}(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n^2}$$

e

$$S(P_n; f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} (S(P_n; f) - s(P_n; f)) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n^2} = 0$$

donde se conclui que

$$\lim_{n\to\infty} s(P_n; f) = \lim_{n\to\infty} S(P_n; f)$$

Por outro lado sabemos que

$$\begin{array}{rcl} \lim_{n\to\infty} s(P_n; f) & \leq & \sup\{s(P_n; f) : n \in \mathbb{N}\} \\ & \leq & \sup\{s(P; f) : P \in \wp([0,1])\} \\ & = & \underline{\int_0^1} f \\ & \leq & \overline{\int_0^1} f \\ & = & \inf\{S(P; f) : P \in \wp([0,1])\} \\ & \leq & \inf\{S(P_n; f) : n \in \mathbb{N}\} \\ & \leq & \lim_{n\to\infty} S(P_n; f) \end{array}$$

Logo temos que

$$\lim_{n\to\infty} s(P_n; f) = \underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f = \lim_{n\to\infty} S(P_n; f)$$

pois caso contrário não teríamos

$$\lim_{n\to\infty} s(P_n; f) = \lim_{n\to\infty} S(P_n; f)$$

(c) A função $f(x) = x$ é integrável em $[0, 1]$ se $\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f$.
Tal foi provado na alínea (b), e o valor do seu integral será

$$\int_0^1 f = \underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f = \lim_{n\to\infty} S(P_n; f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$