Resolução da Ficha 2

Análise Matemática II

Cursos LESIM & LEIC-Taguspark, 1º Semestre de 2001/2002

I

1-

(a) Usando a substituição $x = t^2$ (neste caso $dx = 2tdt$) com t positivo, deduzimos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx &= \int \frac{1}{1+\sqrt{t^2}}2tdt = \int \frac{2t}{1+t}dt = \\
&= \int \frac{2(t+1)-2}{t+1}dt = \int 2 - \frac{2}{t+1}dt = \\
&= 2t - 2log(t+1) = \\
&= 2\sqrt{x} - 2log(\sqrt{x}+1)
\end{aligned}$$

(b) Sendo $\frac{3x^2-3x+1}{(x-1)x^2}$ uma fracção racional própria (o grau do numerador é inferior ao grau do denominador) esta pode ser dada como uma soma de fracções simples cujos denominadores dividem o polinómio $(x-1)x^2$. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2-3x+1}{(x-1)x^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \\
&= \frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{(x-1)x^2} = \\
&= \frac{(A+C)x^2+(-A+B)x-B}{(x-1)x^2}
\end{aligned}$$

onde A, B e C são constantes que satisfazem a equação anterior. Ou seja A, B e C são soluções do sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} A+C &= 3 \\ -A+B &= -3 \\ -B &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C &= 3-A \\ -A-1 &= -3 \\ B &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C &= 1 \\ A &= 2 \\ B &= -1 \end{cases}$$

Temos, portanto, que:

$$\int \frac{3x^2-3x+1}{(x-1)x^2}dx = \int \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}dx = 2log(|x|) + \frac{1}{x} + log(|x-1|)$$

2-

$$e^{-x} \leq y \leq e^x \Rightarrow e^{-x} \leq e^x \Leftrightarrow -x \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$$

assim a área da região

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq e^x, y \geq e^{-x}, x \leq 1\}$$

é dada por

$$\int_0^1 e^x - e^{-x} dx = [e^x + e^{-x}]_{x=0}^{x=1} = e + e^{-1} - 2$$

II

1- Sendo f' contínua, temos que, pelo Teorema Fundamental do Calculo, a função definida por $\int_0^x (t^2 + 2t) f'(t) dt$ é diferenciável e a sua derivada é $(x^2 + 2x) f'(x)$. Assim derivando a igualdade

$$x^3 + x - f(x) = \int_0^x (t^2 + 2t) f'(t) dt$$

obtemos

$$3x^2 + 1 - f'(x) = (x^2 + 2x) f'(x)$$

donde tiramos

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 1}{(x+1)^2}$$

Portanto, $f(x)$ é uma primitiva de $\frac{3x^2+1}{(x+1)^2}$ que satisfaz a igualdade

$$x^3 + x - f(x) = \int_0^x (t^2 + 2t) f'(t) dt$$

$$\int \frac{3x^2 + 1}{(x+1)^2} dx = \int 3 - \frac{6x + 2}{(x+1)^2} dx = \int 3 - \frac{6}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} dx = 3x - 6log(|x+1|) - \frac{4}{x+1} + c$$

Da equação

$$x^3 + x - f(x) = \int_0^x (t^2 + 2t) f'(t) dt$$

resulta, com $x = 0$, que

$$-f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 4$$

Resumindo, a função f é dada por

$$f(x) = 3x - 6log(|x+1|) - \frac{4}{x+1} + 4$$

2- Sendo $\varphi(\theta) = \theta - sen(\theta)$ uma função diferenciável e bijectiva em $[0, 2\pi]$ com $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(2\pi) = 2\pi$, temos que, por substituição de variáveis $x = \varphi(\theta)$,

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta - sen(\theta))(1 - cos(\theta))d\theta$$

Como a função f satisfaz a identidade $f(\theta - sen(\theta)) = 1 - cos(\theta)$ no intervalo $[0, 2\pi]$, o integral é igual a

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^{2\pi}(1-cos(\theta))^2 d\theta &= \textstyle\int_0^{2\pi} 1 - 2cos(\theta) + cos^2(\theta)d\theta = \\
&= \textstyle\int_0^{2\pi} 1 - 2cos(\theta) + \frac{1}{2} + \frac{cos(2\theta)}{2}d\theta = \\
&= [\theta - 2sen(\theta) + \tfrac{\theta}{2} + \tfrac{sen(2\theta)}{4}]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \\
&= 2\pi - 0 + \pi + 0 - (0 - 0 + 0 + 0) = \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$