Resolução da Ficha 3

Análise Matemática II

Cursos LESIM & LEIC-Taguspark, 1^o Semestre de 2001/2002

I

1- (a)

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^4}dx$$

é um integral impróprio de primeira espécie, sendo

$$\lim_{r\to+\infty}\int_1^r \frac{x}{1+x^4}dx$$

o seu valor (caso este limite existe).

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+\infty}\int_1^r \tfrac{x}{1+x^4}dx &= \lim_{r\to+\infty}\int_1^r (\tfrac{1}{2}arctg(x^2))'dx\\ &= \lim_{r\to+\infty}\tfrac{1}{2}(arctg(r^2)-arctg(1))\\ &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{4})=\tfrac{\pi}{8}\end{aligned}$$

(b)

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

é um integral impróprio de segunda espécie em -1 e 1, sendo

$$\lim_{\substack{r\to1\\ s\to-1}}\int_s^r \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

o seu valor (caso este limite existe).

$$\lim_{\substack{r\to1\\ s\to-1}}\int_s^r \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\substack{r\to1\\ s\to-1}}(arcsen(r)-arcsen(s)) = \frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}=\pi$$

2- (a)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x(1+x^4)}dx$$

é um integral impróprio misto, sendo convergente se e só se os integrais impróprios

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x(1+x^4)}dx \quad \text{e} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x(1+x^4)}dx$$

, de segunda e primeira espécie respectivamente, forem convergentes.

$$\frac{\sqrt{x}}{x(1+x^4)} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{quando} \quad x \to 0^+$$

logo, sendo

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

convergente,

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x(1+x^4)}dx$$

é convergente.

$$\frac{\sqrt{x}}{x(1+x^4)} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^5} = \frac{1}{x^{\frac{9}{2}}} \quad \text{quando} \quad x \to +\infty$$

logo, sendo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{9}{2}}}dx$$

convergente,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x(1+x^4)}dx$$

é convergente.

(b)

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+sen(x)}{x-cos(x)}dx$$

é um integral impróprio de primeira espécie e é divergente pois

$$\frac{x+sen(x)}{x-cos(x)} \to 1 \neq 0 \quad \text{quando} \quad x \to +\infty$$

II

1- (a) FALSO.

Seja $f(x) = (e^{-x}sen(e^{2x}))' = 2e^x cos(e^{2x}) - e^{-x}sen(e^{2x})$. f é uma função contínua em $[0, +\infty[$ e o integral impróprio $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ é convergente pois

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{r\to+\infty} \int_0^r (e^{-x}sen(e^{2x}))'dx = \lim_{r\to+\infty} e^{-r}sen(e^{2r}) - sen(1) = -sen(1)$$

No entanto, não é verdade que $f(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$.

(b) VERDADE.

Se o integral impróprio $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ é convergente, então existem os limites

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \int_0^{2x} f(t)dt$$

e são iguais. Assim

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \int_0^{2x} f(t)dt - \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} f(t)dt$$

Logo

$$\int_x^{2x} f(t)dt \to 0 \quad \text{quando} \quad x \to +\infty$$

2- (a) Utilizando a substituição $x = \varphi(t)$ no integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

obtemos

$$\begin{array}{rcll} \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx & = & \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (f'(\varphi(t)))^2}\varphi'(t)dt & \\ & = & \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\varphi'(t)f'(\varphi(t)))^2}dt & \text{pois} \quad \varphi(t) \geq 0 \\ & = & \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (g'(t))^2}dt & \end{array}$$

(b) Usando o resultado da alinea anterior com $\varphi(t) = t - sen(t)$, $\alpha = 0$ e $\beta = 2\pi$ (e portanto $g(t) = 1 - cos(t)$, $a = 0$ e $b = 2\pi$) deduzimos que o comprimento do gráfico da função f que satisfaz a identidade $f(t-sen(t)) = 1 - cos(t)$ definida no intervalo $[0, 2\pi]$ é

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-cos(t))^2 + sen^2(t)}dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2cos(t)}dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4sen^2(\tfrac{t}{2})}dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2|sen(\tfrac{t}{2})|dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2sen(\tfrac{t}{2})dt \\
&= [-4cos(\tfrac{t}{2})]_{t=0}^{t=2\pi} \\
&= -4cos(\pi) - (-4cos(0)) \\
&= 8
\end{aligned}$$