Resolução da Ficha 4

Análise Matemática II

Cursos LESIM & LEIC-Taguspark, 1^o Semestre de 2001/2002

I

1- (a) Temos que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\frac{\cos(x)}{n}| = \frac{1}{n} \to 0$$

pelo que f_n converge uniformemente para a função nula $f(x) = 0$, e como tal, também converge pontualmente para a mesma função.

(b) Para todo o natural n, $g_n(0) = \cos(0) = 1$. Logo g_n não converge pontualmente para a função nula no intervalo $[0, 1]$, e portanto, não converge uniformemente para a função nula.

(c) Para qualquer $x \in [0, 1]$, $h_n(x) = \frac{nx}{(nx)^2+1} \to 0$. Portanto h_n converge pontualmente para a função nula. No entanto, não converge uniformemente pois

$$\sup_{x\in[0,1]} |h_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |h_n(x)| \geq h_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}.$$

2-

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^2(\theta)}{2} d\theta = \int_0^{2\pi} 1 + \frac{\cos(\theta)}{2} d\theta = [\theta + \frac{\sin(\theta)}{2}]_0^{2\pi} = 2\pi$$

II

1- $x^2 + (y-2)^2 \leq 1 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 2 + \sqrt{1-x^2} \wedge -1 \leq x \leq 1$. Assim, o volume do sólido obtido por revolução do círculo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$ em torno do eixo das abcissas é dada por

$$\int_{-1}^{1} \pi(2 + \sqrt{1-x^2})^2 dx - \int_{-1}^{1} \pi(2 - \sqrt{1-x^2})^2 dx = 8\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx$$

Fazendo a substituição $x = \sin t$ com $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, obtemos

$$\begin{aligned}
8\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx &= 8\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \\
&= 8\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\
&= 8\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \\
&= 4\pi^2
\end{aligned}$$

Concluindo, o volume do sólido é $4\pi^2$.

2- (a) Sabemos que f é diferenciável e decrescente em $\mathbb{R}$. Assim o integral

$$\int_0^{+\infty} |f'(x)|dx = \int_0^{+\infty} -f'(x)dx = f(0) - \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

converge caso existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Portanto, se $f(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$ temos as duas primeiras condições do critério de Dirichlet satisfeitas. Por outro lado $sen(x)$ é uma função contínua com uma primitiva $(cos(x))$ limitada.

Logo, pelo critério de Dirichlet, o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} f(x)sen(x)dx$$

é convergente.

(b) f é positiva, logo se

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

converge

$$\int_0^{+\infty} |f(x)sen(x)|dx$$

também converge, pois $|f(x)sen(x)| \leq f(x)$. Ou seja

$$\int_0^{+\infty} f(x)sen(x)dx$$

é absolutamente convergente.

Por outro lado, se

$$\int_0^{+\infty} |f(x)sen(x)|dx$$

converge, então

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |f(x)sen(x)|dx$$

converge, e como tal

$$\int_0^{+\infty} |f(x)cos(x)|dx = \int_0^{+\infty} f(x)|sen(x - \frac{\pi}{2})|dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f(t + \frac{\pi}{2})|sen(t)|dt$$

também converge, pois, sendo f decrescente, $f(x+\frac{\pi}{2})|sen(x)| \leq |f(x)sen(x)|$.

Portanto, temos que

$$\int_0^{+\infty} |f(x)sen(x)| + |f(x)cos(x)|dx = \int_0^{+\infty} f(x)|sen(x) + cos(x)|dx$$

converge. Isto implica que

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

também converge, visto que $|sen(x)|+|cos(x)| \geq 1$ (esta desigualdade resulta do facto de $(|sen(x)| + |cos(x)|)^2 = 1 + 2|sen(x)||cos(x)| \geq 1$).