# Resolução da Ficha 6

Análise Matemática II

Cursos LESIM & LEIC-Taguspark, 1$^o$ Semestre de 2001/2002

## I

**1-**

(a) $intA = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \wedge xy \neq 0\}$,
$extA = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$,
$frontA = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \vee (xy = 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1)\}$,
$\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) $intB = \emptyset$,
$extB = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 3\}$,
$frontB = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\}$,
$\overline{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\}$.

(c) $intC = \emptyset$,
$extC = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \vee (x = 0 \wedge |y| > 1) \vee (x > 0 \wedge y \neq \cos(\frac{1}{x}))\}$,
$frontC = \{(x, \cos(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}$,
$\overline{C} = \{(x, \cos(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}$.

**2-**

(a) $f$ é uma função contínua no seu domínio $D$, pois é uma função racional cujo denominador não se anula no domínio $D$.

(b) O ponto $(0, 0)$ é um ponto aderente ao domínio $D$, assim $f$ é prolongável por continuidade ao ponto $(0, 0)$ se e só se exite o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) \quad \text{com} \quad (x, y) \in D$$

Como $|f(x, y)| = |\frac{x^2 y}{x^2+y^4}| \leq |\frac{x^2 y}{x^2}| = |y|$ e $|y| \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$, temos que o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) \quad \text{com} \quad (x, y) \in D$$

existe e é igual a 0. E portanto, o valor de $f$ no ponto $(0, 0)$ terá de ser 0.

(c) Para $(x, y) \in D$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^4) - 2x^3y}{(x^2+y^4)^2} = \frac{2xy^5}{(x^2+y^4)}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^4) - 4x^2y^4}{(x^2+y^4)^2} = \frac{x^4 - 3x^2y^4}{(x^2+y^4)}$$

Assim, o gradiente no ponto $(1,0) \in D$ será

$$\nabla f(1,0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)) = (0,1)$$

## II

**1-** (a) Seja $A$ um conjunto aberto contido em $X$. Sendo $A$ um conjunto aberto, temos que para qualquer elemento $x \in A$ existe uma bola $B_r(x)$ (centrada em $x$ com raio $r$ positivo) contida em $A$, e portanto contida em $X$ pois $A \subseteq X$. Deste modo garantimos que qualquer $x \in A$ pertence ao interior de $X$, logo $A$ está contido no interior de $X$.

Seja $x$ um ponto interior de $X$. Então, por definição de interior, existe uma bola aberta $B_r(x)$ (centrada em $x$ com raio $r$ positivo) contida em $X$. Sendo $B_r(x)$ um conjunto aberto contido em $X$, temos, pelo resultado demonstrado anteriormente, que $B_r(x)$ está contido no interior de $X$. Donde se conclui que o interior de $X$ é um conjunto aberto.

(b) Seja $l$ o limite de uma sucessão $(x_n)$ com termos num conjunto fechado $X$. Se $l$ não pertencesse a $X$ então existiria uma bola $B_r(l)$ (centrada em $l$ com raio $r$ positivo) contida no complementar de $X$ pois este é aberto. Mas sendo $l$ o limite de $(x_n)$, teríamos que a partir de certa ordem os termos de $(x_n)$ estariam em $B_r(l)$ o que contradiz o facto dos termos de $x_n$ pertencerem a $X$ e $B_r(l) \subset X^c$.

Portanto o limite de qualquer sucessão com termos num conjunto fechado $X$ tem que pertencer ao conjunto $X$.

**2-** (a) Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ conexo por arcos e $f(X)$ a sua imagem por uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Sejam $p$ e $q$ dois pontos arbitrários de $f(X)$. Como $p$ e $q$ pertencem à imagem de $X$ existem dois pontos $x$ e $y$ pertencentes a $X$ tais que $f(x) = p$ e $f(y) = q$. Como $X$ é conexo por arcos, existe uma função contínua

$$\phi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

tal que $\phi(0) = x$, $\phi(1) = y$ e $\phi(t) \in X$ para todo $t \in [0, 1]$. Compondo com $f$ obtemos uma função contínua

$$\psi = f \circ \phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$$

tal que $\psi(0) = p$, $\psi(1) = q$ e $\psi(t) \in f(X)$ para todo $t \in [0, 1]$. Com isto concluimos que $f(X)$ é conexo por arcos.

(b) Seja $X$ um conjunto aberto e $f^{-1}(X)$ a pré-imagem de $X$ por uma função contínua $f$. Seja $x$ um elemento de $f^{-1}(X)$ (se $f^{-1}(X)$ for vazio será naturalmente aberto), então $f(x) \in X$ e, sendo $X$ um conjunto aberto, existe uma bola $B_r(f(x))$ (centrada em $f(x)$ com raio $r$ positivo) contida em $X$. Como $f$ é contínua existe uma bola $B_s(x)$ (centrada em $x$ com raio $x$ positivo) cuja imagem $f(B_s(x))$ está contida em $B_r(f(x))$, logo contida em $X$. Portanto $B_s(x)$ está contido em $f^{-1}(X)$ o que demonstra que $f^{-1}(X)$ é um cunjunto aberto.