Resolução da Ficha 7

Análise Matemática II

Cursos LESIM & LEIC-Taguspark, 1^o Semestre de 2001/2002

I

1- (a) Para $(x,y) \neq (0,0)$ f é contínua pois é dada por somas, produtos e composições de funções contínuas.

Para $(x,y) = (0,0)$ f é contínua se e só se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

ou seja

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log(x^2+y^2) = 0$$

Como

$$|f(x,y)| = |xy||\log(x^2+y^2)| \leq (x^2+y^2)|\log(x^2+y^2)|$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)|\log(x^2+y^2)| = \lim_{t\to 0^+} |t\log t| = |\lim_{t\to 0^+} \frac{\log t}{\frac{1}{t}}| =$$

$$= |\lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}| = |\lim_{t\to 0^+} -t| = 0$$

temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log(x^2+y^2) = 0$$

logo f é contínua em $(0,0)$.

Portanto f é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$.

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

(c) f é diferenciável no ponto $(0,0)$ se e só se

$$f(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0)\cdot(x,y) + o(\|(x,y)\|)$$

ou seja

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Sendo $f(0,0)=0$ e $\nabla f(0,0)=(0,0)$ temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Como

$$\left|\frac{xy\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\frac{(x^2+y^2)\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| =$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}\,|\log(\sqrt{x^2+y^2}^{\,2})| = 2\sqrt{x^2+y^2}\,|\log(\sqrt{x^2+y^2})|$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2\sqrt{x^2+y^2}\,|\log(\sqrt{x^2+y^2})| = \lim_{t\to 0}|2t\log t| = 0$$

temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

logo f é diferenciável no ponto $(0,0)$.

2- (a)

$$g(x,y)=0 \Leftrightarrow y(y+x^2-1)=0 \Leftrightarrow y=0 \vee y=1-x^2$$

(b) $\nabla g(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \wedge \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0) \Leftrightarrow (2xy=0 \wedge 2y+x^2-1=0) \Leftrightarrow ((x=0 \vee y=0)\wedge 2y+x^2-1=0) \Leftrightarrow ((x=0\wedge 2y+x^2-1=0) \vee (y=0 \wedge 2y+x^2-1=0)) \Leftrightarrow ((x=0\wedge y=\frac{1}{2}) \vee (y=0\wedge x^2=1)) \Leftrightarrow ((x=0\wedge y=\frac{1}{2}) \vee (y=0\wedge x=1) \vee (y=0 \wedge x=-1))$. Logo os pontos de estacionaridade são: $(0,\frac{1}{2})$,$(-1,0)$ e $(1,0)$.

A matriz hessiana de g num ponto genérico (x,y) é:

$$H_g(x,y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2 \end{bmatrix}$$

Para $(x,y) = (0, \frac{1}{2})$, $H_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é definida positiva ($a_{11} = 1 > 0$ e $\det H_g = 2 > 0$) logo $(0, \frac{1}{2})$ é um ponto de mínimo local.

Para $(x,y) = (-1, 0)$, $H_g = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ é definida negativa ($\det H_g = -4 < 0$) logo $(-1, 0)$ é um ponto de sela.

Para $(x,y) = (1, 0)$, $H_g = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ é definida negativa ($\det H_g = -4 < 0$) logo $(1, 0)$ é um ponto de sela.

3- $f(x,y) = f(-y, 2x) \Leftrightarrow f(x,y) = f \circ g(x,y)$ onde $g(x,y) = (-y, 2x)$.

Como $g(x,y) = (-y, 2x)$ é diferenciável (pois é linear) e f também o é, temos que:

$$Df(x,y) = D(f \circ g)(x,y) = Df(g(x,y))Dg(x,y)$$

portanto

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(-y,2x) & \frac{\partial f}{\partial y}(-y,2x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

logo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(-y, 2x)$$