

# 1º Teste

## Análise Matemática II

Cursos LESIM & LEIC-Taguspark, 1º Semestre de 2001/2002

Duração: 1 hora e 30 minutos

Data: 10/ 11/ 2001

**1- [6 val.]** Determine uma primitiva para cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a)  $\frac{\log(x)}{x^2}$ .

(b)  $\frac{1}{x \log(\sqrt{x})}$ .

**2- [5 val.]** Considere o conjunto  $S \subset \mathbb{R}^2$  definido por

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x+2} \leq y \leq \frac{2}{4+x^2} \wedge x > -2\}$$

Esboce o conjunto  $S$  e calcule a sua área.

**3- [6 val.]** Considere a função  $f$  definida em  $]0, +\infty[$  por

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^\alpha (1 + x^2)^\beta}$$

(a) Diga, justificando, para que valores reais de  $\alpha$  e  $\beta$  é convergente o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx$$

(b) Determine, para  $\alpha = 2$  e  $\beta = 1$ , o valor do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

**4- [3 val.]** Seja  $g$  uma função de classe  $C^1$  tal que  $g(0) = 0$ ,  $g'(0) = 0$  e, para todo o  $x > 0$ , o comprimento do seu gráfico entre 0 e  $x$  é dado pela sua derivada  $g'(x)$ .

(a) Mostre que  $g$  possui segunda derivada  $g''$ , e que esta satisfaz a seguinte identidade:

$$\frac{g''(x)}{\sqrt{1 + (g'(x))^2}} = 1 \quad \text{para } x > 0$$

(b) Determine  $g(x)$ , para  $x > 0$ .

SUGESTÃO: Primitive ambos os lados da identidade anterior.

$$(\operatorname{arcsh}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1 + u^2}}$$

$$(\operatorname{ch}(x))' = \operatorname{sh}(x)$$