

1º Teste

Análise Matemática II

Cursos LESIM & LEIC-Taguspark, 1º Semestre de 2001/2002

Duração: 1 hora e 30 minutos

Data: 10/ 11/ 2001

1- [6 val.] Determine uma primitiva para cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) $\frac{\log(x)}{x^2}$.

(b) $\frac{1}{x \log(\sqrt{x})}$.

2- [5 val.] Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x+2} \leq y \leq \frac{2}{4+x^2} \wedge x > -2\}$$

Esboce o conjunto S e calcule a sua área.

3- [6 val.] Considere a função f definida em $]0, +\infty[$ por

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^\alpha(1+x^2)^\beta}$$

(a) Diga, justificando, para que valores reais de α e β é convergente o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx$$

(b) Determine, para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, o valor do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

4- [3 val.] Seja g uma função de classe C^1 tal que $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ e, para todo o $x > 0$, o comprimento do seu gráfico entre 0 e x é dado pela sua derivada $g'(x)$.

(a) Mostre que g possui segunda derivada g'' , e que esta satisfaz a seguinte identidade:

$$\frac{g''(x)}{\sqrt{1 + (g'(x))^2}} = 1 \quad \text{para } x > 0$$

(b) Determine $g(x)$, para $x > 0$.

SUGESTÃO: Primitive ambos os lados da identidade anterior.

$$(\operatorname{arcsh}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1 + u^2}}$$

$$(\operatorname{ch}(x))' = \operatorname{sh}(x)$$