Resolução do 2^o Teste

Cálculo Diferencial e Integral I

Tagus 2^afase, 1^o Semestre de 2007/2008

Versão A

Duração: 1 hora e 30 minutos

Data: 18/ 1/ 2008

1-

(a) $\int \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \operatorname{arcsen}(x)$

(b)

$$\frac{2x^2+x-2}{x^3+x^2} = \frac{2x^2+x-2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} =$$

$$= \frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)} = \frac{(A+C)x^2+(A+B)x+B}{x^3+x^2}$$

de onde se tira o sistema de equações:

$$\begin{cases} A+C &= 2 \\ A+B &= 1 \\ B &= -2 \end{cases}$$

cuja solução é $A = 3$, $B = -2$ e $C = -1$.

Assim temos

$$\int \frac{2x^2+x-2}{x^3+x^2}dx = \int \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x+1}dx = 3\log(|x|) + \frac{2}{x} - \log(|x+1|)$$

(c) Primitivando por partes: $\int u'v = uv - \int uv'$ com $u' = x$ e $v = \arctan x$. Portanto temos $u = \frac{x^2}{2}$ e $v' = \frac{1}{x^2+1}$. Aplicando a fórmula da primitivação por partes obtemos:

$$\begin{aligned} \int x\arctan(x)dx &= \tfrac{x^2}{2}\arctan x - \tfrac{1}{2}\int \tfrac{x^2}{x^2+1}dx \\ &= \tfrac{x^2}{2}\arctan x - \tfrac{1}{2}\int 1 - \tfrac{1}{x^2+1}dx \\ &= \tfrac{x^2}{2}\arctan x - \tfrac{1}{2}(x - \arctan x) \\ &= \tfrac{x^2}{2}\arctan x - \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\arctan x \end{aligned}$$

(d) Considerando a mudança de variável $x = t^2$ (e portanto $dx = 2tdt$), temos que

$$\begin{array}{rcl}\int \frac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}}dx & = & \int \frac{\sqrt{t^2}-1}{t^2+\sqrt{t^2}}2tdt \\ & = & \int \frac{t-1}{t(t+1)}2tdt \\ & = & \int \frac{2t-2}{t+1}dt \\ & = & \int 2 - \frac{4}{t+1}dt \\ & = & \int 2t - 4\log(|t+1|) \\ & = & \int 2\sqrt{x} - 4\log(\sqrt{x}+1)\end{array}$$

2- [3 val.] Para $x > 0$ temos que

$$\frac{1}{x} \leq x^2 \Leftrightarrow 1 \leq x^3 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Portanto o conjunto S está compreendido entre as rectas verticais $x = 1$ e $x = 3$ e as curvas de equação cartesiana $y = x^2$ (acima) e $y = \frac{1}{x}$ (abaixo) formando um triângulo deformado com vértices: $(1, 1)$, $(3, 9)$ e $(3, \frac{1}{3})$.

Deste modo a sua área será dada pelo valor do integral definido

$$\int_1^3 x^2 - \frac{1}{x}dx = \left[\frac{x^3}{3} - \log x\right]_{x=1}^{x=3} = \frac{3^3}{3} - \log 3 - (\frac{1^3}{3} - \log 1) = \frac{26}{3} - \log 3$$

Nota- Por motivos técnicos esta resolução não inclui um esboço de S.

3-

$$F'(x) = \frac{x^2 - x - 4}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x^2+1) + Bx(x+1) + C(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2 + (B+C)x + A + C}{(x+1)(x^2+1)}$$

de onde se tira o sistema de equações:

$$\begin{cases} A+B & = & 1 \\ B+C & = & -1 \\ A+C & = & -4 \end{cases}$$

cuja solução é $A = -1$, $B = 2$ e $C = -3$.

Portanto

$$F'(x) = \frac{-1}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1}$$

Assim, sendo F uma primitiva de F', temos

$$F(x) = -\log(x+1) + \log(x^2+1) - 3\arctan x + C$$

sendo C uma constante tal que F satisfaça a condição $F(0) = 2$. Ou seja,

$$-\log(1) + \log(1) - 3\arctan(0) + C = 2 \Leftrightarrow C = 2$$

Resultado final

$$F(x) = -\log(x+1) + \log(x^2+1) - 3\arctan x + 2$$

4-

$$(a) \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} \pi\cos(\pi x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{sen}(\pi x)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0)\right] = \frac{1}{\pi}$$

$$(b) \int_0^1 (x+\sqrt{x})dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

5- O polinómio de Taylor de grau 3 em $a = 0$ da função $f(x) = \log(1-x)$ é dado pela expressão:

$$p_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$f(x) = \log(1-x) \Rightarrow f(0) = 0$
$f'(x) = \frac{-1}{1-x} \Rightarrow f'(0) = -1$
$f''(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$
$f'''(x) = -\frac{2}{(1-x)^3} \Rightarrow f'''(0) = -2$
Portanto o polinómio de Taylor de grau 3 em $a = 0$ da função $f(x) = \log(1-x)$ é

$$p_{3,0}(x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

6- (a) Sendo ψ uma função contínua em $]0, +\infty[$ (de acordo com o enunciado) temos que $\psi(t) + \operatorname{sen}(\log t)$ é também uma função contínua em $]0, +\infty[$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, o integral indefinido $\int_1^x (\psi(t)+$

$\text{sen}(\log t))dt$ é uma função diferenciável em $]0,+\infty[$. Logo $\psi(x) = \frac{1}{x}\int_1^x (\psi(t)+ \text{sen}(\log t))dt$ é uma função diferenciável em $]0,+\infty[$.

(b) Derivando ambos os termos da igualdade

$$x\psi(x) = \int_1^x (\psi(t) + \text{sen}(\log t))dt$$

(usando o Teorema Fundamental do Cálculo no segundo termo) obtemos a seguinte igualdade

$$\psi(x) + x\psi'(x) = \psi(x) + \text{sen}(\log x)$$

donde tiramos

$$\psi'(x) = \frac{1}{x}\text{sen}(\log x)$$

Portanto, $\psi(x)$ é uma primitiva de $\frac{1}{x}\text{sen}(\log x)$, logo

$$\psi(x) = -\cos(\log x) + c$$

sendo c uma constante.

Além disso ψ satisfaz a igualdade

$$x\psi(x) = \int_1^x (\psi(t) + \text{sen}(\log t))dt$$

donde resulta, com $x = 1$, que

$$\psi(1) = 0 \Leftrightarrow c = \cos(\log(1)) = 1$$

Resumindo, a função ψ é dada por

$$\psi(x) = -\cos(\log x) + 1$$