Exame/Testes

Cálculo Diferencial e Integral I

Tagus 2^afase, 1^o Semestre de 2007/2008

Versão B

Duração: 1 hora e 30 minutos (Teste 1 ou 2)/ 3 horas (Exame)

Data: 8/ 2/ 2008

Exame: grupos I & II
Repescagem do 1 Teste: grupo I
Repescagem do 2 Teste: grupo II

Grupo I

1- [1,5 val.] Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x+1} < 0\}, \qquad B = \{0, 1, 2\}$$

(a) Mostre que $A =]-2, -1[\cup]0, 1[$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cup B$.

2- [1 val.] Sejam α e β constantes reais e $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em todo o $\mathbb{R}$ pela expressão:

$$f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} - \alpha & \text{se } x > 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^{\beta x} - e^x}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Determine os valores de α e β de modo que f seja contínua em $x = 0$.

3- [1 val.] Determine a derivada das funções definidas pelas seguintes espressões:

(a) $\log(x + \operatorname{sen} x)$ (b) $e^{\cosh x} x$

4- [4 val.] Considere a função $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$g(x) = \frac{x+2}{x^2 - 2x + 1}$$

(a) Determine o domínio D_g de g e diga, justificando, se g é contínua e se é diferenciável em todo o seu domínio.

(b) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de g.

(c) Determine, se existirem, os limites (em $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\lim_{x \to -\infty} g(x), \lim_{x \to +\infty} g(x) \text{ e } \lim_{x \to 1} g(x)$$

(d) Determine o contradomínio de g.

(e) Faça um esboço do gráfico de g contendo a informação recolhida nas alíneas anteriores.

5- [2,5 val.] Seja $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 que satisfaz as seguintes condições:

$$\varphi(1) = -1 \text{ e } \varphi(n+1) = 3 - 2\varphi(n), \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

(a) Demonstre, por indução, que para todo o número natural n

$$\varphi(n) = 1 + (-2)^n$$

(b) Demonstre que existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi'(\alpha) = 4$.

(c) Demonstre que não existe uma função ψ contínua em $[0,1]$ tal que $\psi(\frac{1}{n}) = \varphi(n)$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Grupo II

1- [4 val.] Determine uma primitiva para cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) $\operatorname{sen} x + \tan x$

(b) $\frac{2x^2-2x-8}{x^3+4x}$

(c) $\operatorname{arcsen}(x)$

(d) $\frac{3}{1+e^x}$ (considere a mudança de variável $x = \log t$)

2- [1,5 val.] Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}$ definido por

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xe^{x^2} \leq y \leq xe^x \wedge x \geq 0\}$$

Esboce o conjunto S e calcule a sua área.

3- [1 val.] Determine a função $F :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = \frac{-3x^2 + x}{(x-1)^2(x+1)}, \quad F(2) = 0$$

4- [1 val.] Calcule o valor dos seguintes integrais:

$$(a) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) e^{\operatorname{sen} x} dx$$

5- [1 val.] Determine o polinómio de Taylor de grau 2 em $a = 1$ da função

$$f(x) = x^3 - x$$

6- [1,5 val.] Seja ψ uma função contínua e positiva em $\mathbb{R}$ que satisfaz a seguinte igualdade:

$$\log(\psi(x)) = \int_0^x \frac{e^t\sqrt{2 + e^t}}{\psi(t)} dt$$

(a) Diga, justificando, se ψ é diferenciável ou não.

(b) Determine de forma explícita a função ψ.