Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE – 1º SEM. 2006/07
4ª FICHA DE EXERCÍCIOS

I. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy. Extremos.

1) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh} x-\operatorname{sen} x}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos(ax))}{\log(\cos(bx))}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cot x-1}{x^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^2}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{x^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{10^x-5^x}{x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{x}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^{1000}}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen}(x)\log(x)$ (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x\log\left(\frac{x}{x+1}\right)$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\log\left(\frac{x}{x+1}\right)$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\log(x)\log(1-x)$ (n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\operatorname{sen}(1/x)\log(x)$ (o) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\operatorname{sen}(1/x)e^x$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^{1/4}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (q) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\cos(1/x)-1\right)$ (r) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(1/x)$

2) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}(\log x)^{x-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^{(e^x-1)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}(1-e^x)^x$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(e^x-1)^x$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(2+x^3)^{1/\log x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(3+x^2)^{1/\log x}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^x$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{1/x}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^x$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1/x)^{\operatorname{sen} x}$ (k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\operatorname{sen}(1/x))^{1/x}$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\cos(1/x))^x$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ (n) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\cos(1/x))^{x^2}$ (o) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\operatorname{sen}(1/x))^{1/x^2}$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{1/\log x}$ (q) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\operatorname{sen}(1/x))^{1/\log x}$ (r) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{1/\log x}$

(s) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}x^{\log(\log x)}$ (t) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x-1}}$ (u) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^{(x^x-1)}$ (v) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^{(x^x)}-1$

(w) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}(1-2^x)^{\operatorname{sen} x}$ (x) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\operatorname{sen} x}$ (y) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^{1/\log x}$ (z) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}[\log(1/x)]^x$

3) Seja f uma função definida numa vizinhança de zero, $V_\varepsilon(0)=\,]-\varepsilon,+\varepsilon[$ com $\varepsilon>0$, diferenciável em $V_\varepsilon(0)\setminus\{0\}$ e tal que $xf'(x)>0$ para todo o $x\in V_\varepsilon(0)\setminus\{0\}$.

(a) Supondo que f é contínua no ponto 0, prove que $f(0)$ é um extremo de f e indique se é mínimo ou máximo. No caso de f ser diferenciável no ponto 0, qual será o valor de $f'(0)$?

(b) Mostre, por meio de um exemplo, que sem a hipótese de continuidade de f no ponto 0 não se pode garantir que $f(0)$ seja um extremo de f.

4) Seja $f(x)=1-x^{2/3}$. Mostre que $f(1)=f(-1)=0$, mas que $f'(x)$ nunca é zero no intervalo $[-1,1]$. Explique porque é que este facto não contraria o Teorema de Rolle.

5) Seja $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa. Justifique as suas respostas.

(a) Para qualquer $n \geq 2$, a função f tem máximo no intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.
(b) A função f é limitada.
(c) A função f' tem infinitos zeros.

6) Use o Teorema de Lagrange para deduzir as seguintes desigualdades:

(a) $|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| \leq |x-y|\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}\,.$
(b) $ny^{n-1}(x-y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x-y)$ se $0 < y \leq x$ e $n \in \mathbb{N}$.

7) Seja ϕ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $\phi(n) = (-1)^n n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Prove que não existe $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x)$.

8) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, com derivada crescente e tal que $f(0) = 0$. Mostre que a função definida por $g(x) = f(x)/x$ é crescente em $\mathbb{R}^+$.

9) Considere a função $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \log\sqrt{1-x^2} & , \ x \in]-1, 0] \\[2ex] x^2 e^{1-x^2} & , \ x \in]0,+\infty[\ . \end{cases}$$

(a) Estude a função f quanto à continuidade.
(b) Determine $\lim_{x\to-1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
(c) Defina a função f'.
(d) Determine os intervalos de monotonia de f e os pontos em que f tem um extremo local.

10) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2)}{x} & , \ x \neq 0 \\[2ex] 0 & , \ x = 0\ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua no ponto zero e calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Diga, justificando, se a seguinte proposição é verdadeira ou falsa: a equação $f'(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções distintas em $\mathbb{R}$.

11) Supondo que f é uma função de classe C^1 em $[a,b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y| \quad \text{para quaisquer } x, y \in [a,b]\,.$$

12) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$ que satisfaz a desigualdade $f(x) \geq x^2$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = \alpha$.

13) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(\operatorname{sen} x)$.

(a) Determine e classifique os extremos locais da função φ.
(b) O que pode dizer sobre o número de soluções da equação $\varphi''(x) = 0$?

14) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente e tal que

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty\ .$$

(a) Mostre que existe um único ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) = 0$, e que $m \stackrel{\text{def}}{=} f(a)$ é o mínimo absoluto de f.
(b) Dado qualquer valor $b \in]m, +\infty[$, mostre que o conjunto $f^{-1}(b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : f(x) = b\}$ tem exactamente dois elementos.

15) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $\phi(n) = (-1)^n/n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Suponha que existe $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x)$. O que pode dizer sobre o seu valor?

16) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, com derivada $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e limitada, e tal que $g(0) = 0$. Considere a função $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \frac{g(x)}{x}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Mostre que h é uma função limitada em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e prolongável por continuidade ao ponto zero.

17) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
(a) Mostre que $\lim_{x\to+\infty}[f(x+2) - f(x)] = 0$.
(b) Será que se pode garantir que $\lim_{x\to+\infty}[f(2x) - f(x)] = 0$? Justifique.

18) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2}\,, & \text{se } x < 0; \\[2ex] -\tan\left(\dfrac{x}{6+x^2}\right)\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = -1/6$.
(b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.
(c) Prove que a equação $f'(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções distintas em $\mathbb{R}$.

19) Seja $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que

$$\phi(2n) = -2n \quad \text{e} \quad \phi(2n-1) = 2n-1\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Mostre que a equação $\phi(x) = 0$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}^+$.
(b) Mostre que a equação $\phi'(x) = 0$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}^+$.

20) (a) Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = p \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$ existe, então é igual a zero.
Sugestão: aplique o Teorema de Lagrange a intervalos da forma $[x, x+1]$.
(b) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com assímptota à direita de equação $y = mx + p\,,\ m, p \in \mathbb{R}$. Mostre que se $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ existe, então é igual a m.

II. Representação gráfica de funções.

1) Nas alíneas seguintes, cada função está definida em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a fórmula dada para $f(x)$ faz sentido. Em cada caso, determine intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas de f, e esboce o seu gráfico.

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ (c) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$ (e) $f(x) = \dfrac{|x|}{1-|x|}$ (f) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(g) $f(x) = xe^{1/x}$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{1+\log x}$

2) Considere a função $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, contínua no ponto 0 e tal que

$$f(x) = \sqrt{x}\,\log(x),\ \ x > 0\,.$$

(a) Calcule $f(0)$.
(b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x = 0$ e $x = 1$.
(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

3) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x|e^{-x^2/2},\ \ x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
(b) Determine (justificando) os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.
(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

4) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log x & ,\ x > 0 \\ \dfrac{x^2}{1-x} & ,\ x \leq 0\,. \end{cases}$$

(a) Mostre que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$.
(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
(c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

5) Considere a função $f :]1,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{2} + \log(x+1) - \log(x-1)\,,\ \forall\, x > 1\,.$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.
(b) Determine as concavidades e inflexões de f.
(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

6) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \, , \ \forall \, x \neq 0 \ .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.
(b) Determine as concavidades e inflexões de f.
(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

7) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+2} \, , \ \forall \, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \ .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.
(b) Determine as concavidades e inflexões de f.
(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.

III. Funções Trigonométricas e Hiperbólicas Inversas.

1) Considere a função inversa da função seno hiperbólico, argsenh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que

$$\text{argsenh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \text{e que} \quad \frac{d}{dx}(\text{argsenh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, , \ \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

2) Considere a função inversa da função coseno hiperbólico, quando esta última é restrita ao intervalo $[0, +\infty[$, argcosh : $[1, +\infty[\to [0, +\infty[$. Mostre que

$$\text{argcosh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \ , \ \forall x \in [1, +\infty[\ ,$$

e que

$$\frac{d}{dx}(\text{argcosh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, , \ \forall x \in \,]1, +\infty[\ .$$

3) Determine o domínio das funções definidas pelas seguintes expressões.

(a) $f(x) = \text{arcsen}\, \dfrac{x}{2}$ (b) $f(x) = \text{arcsen}\, e^x$ (c) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$

(d) $f(x) = \arccos \dfrac{1}{x}$ (e) $f(x) = \text{arcsen}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ (f) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

(g) $f(x) = \log\left(\arccos \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (h) $f(x) = \log\left(1 - \arctan x\right)$

4) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x < 0 \\ \\ 1 + e^{1-x} & , \ x \geq 0 \ . \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
(b) Calcule os limites laterais de f no ponto 0.

5) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x > 0 \\ \\ \dfrac{1}{x^2+1} & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.
(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.
(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

6) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x/2)$ (b) $f(x) = \arccos(1/x)$ (c) $f(x) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$

(d) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{x}\right)$ (e) $f(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ (f) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

(g) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (h) $f(x) = \log\left(\arccos\left(1/\sqrt{x}\right)\right)$ (i) $f(x) = e^{\arctan(x)}$

7) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & , \ x \leq 0 \\ \\ \arctan(1/x) & , \ x > 0 \ , \end{cases}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ fixos.
(a) Mostre que f é diferenciável no ponto 1 e escreva uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.
(b) Sabendo que f é diferenciável no ponto 0, determine os valores de a e b.
(c) Defina f' e diga se a função f é de classe $C^1(\mathbb{R})$.

8) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x^2)}{x}, & \text{se } x < 0; \\ \\ \operatorname{sen}(x)\,, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

9) Considere a função $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(e^{x^2} - 1)}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \\ \operatorname{arcsen}(x), & \text{se } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

10) Considere a função $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\log(1 + x^2))}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \\ \operatorname{arcsen}(x), & \text{se } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

11) Considere a função $f :]-\infty, 2\pi[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \log(1 - \cos(x)), & \text{se } 0 < x < 2\pi; \\ \\ \arctan(x^2), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-\infty, 2\pi[\setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 0$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

12) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + \operatorname{sen}^2(x))}{x}, & \text{se } x < 0; \\ \\ \arctan(x), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

13) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(x^2)} - 1}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \\ \arctan(x), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

14) Considere a função $f : [-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1-\cos(x)} - 1}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \\ \operatorname{arcsen}(x/2), & \text{se } -2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-2, +\infty[\setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1/2$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

15) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\log(1 + x^2))}{x}, & \text{se } x < 0; \\ \\ \arctan(x), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

16) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1-\cos(x)} - 1}{x}, & \text{se } x < 0; \\ \\ \arctan(x/2), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1/2$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

17) Considere a função $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + \operatorname{sen}^2(x))}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \\ \operatorname{arcsen}(x), & \text{se } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

18) Considere a função $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(x^2)} - 1}{x}, & \text{se } x > 0; \\[2ex] \operatorname{arcsen}(x), & \text{se } -1 \le x \le 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

19) Considere a função $f :]-\infty, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(e^x - 1)}{x}, & \text{se } x < 0; \\[2ex] \operatorname{arcsen}(x/2), & \text{se } 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

(a) Calcule a derivada de f em $]-\infty, 2[\setminus \{0\}$.
(b) Mostre que f é diferenciável no ponto zero com $f'(0) = 1/2$.
(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

20) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(2x) - 2\operatorname{arcsen}(x)}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x \operatorname{arcsen}(1/x)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{arcsen}(1/x)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{\arctan(1/x)}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan(x)\right)^{1/x}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)^{1/x}$

21) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x + 2\arctan\frac{1}{x}, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} .$$

Esboce o seu gráfico e indique o seu contradomínio.

22) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{1+x}{|x|}\right) & , x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & , x = 0 . \end{cases}$$

(a) Estude f quanto à continuidade em todo o seu domínio, e quanto à existência de limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.
(b) Determine (justificando) os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

23) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 0 e tal que

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right), \ x \neq 0 .$$

(a) Calcule $f(0)$ e estude f quanto à existência de limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.
(b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x = 0$ e $x = 1$.
(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

24) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x^2) & , \ x \geq 0 \\ \\ xe^{1/x} & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$.
(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
(c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

25) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{1+x}\right) & , x \geq 0 \\ \\ x^2 e^x & , x < 0 \ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua mas não diferenciável no ponto zero.
(b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.
(c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

26) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2\arctan(x) - x\,, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \ .$$

(a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.
(b) Determine as concavidades e inflexões de f.
(c) Determine as assímptotas ao gráfico de f.
(d) Esboce o gráfico de f e indique o seu contradomínio.