Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE – 1º SEM. 2006/07
5ª FICHA DE EXERCÍCIOS

PRIMITIVAÇÃO DE FUNÇÕES ELEMENTARES

Primitivação é a operação "inversa" da derivação. Mais precisamente, uma **primitiva** de uma função f é uma função F com derivada $F' = f$, i.e. tal que

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)\,.$$

Escreveremos então que

$$F(x) = \int f(x)\,dx\,,$$

o que significa precisamente que "F é uma função com derivada $F' = f$". Notem que

$$F' = f \Rightarrow (F+c)' = f \text{ para qualquer constante } c \in \mathbb{R},$$

pelo que se F é uma primitiva de f, então $F + c$ também é uma primitiva de f.

O objectivo desta ficha é aprender a encontrar primitivas de algumas funções elementares, quando essas primitivas podem também ser expressas como funções elementares. Aqui, o termo **função elementar** significa uma função que pode ser expressa por adição, multiplicação, divisão e composição de funções polinomiais, potências, funções trigonométricas, hiperbólicas e respectivas inversas, e funções exponencial e logaritmo.

I. Primitivas Imediatas.

As fórmulas para as derivadas de algumas funções bem nossas conhecidas, conduzem à seguinte tabela de primitivas imediatas:

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \Rightarrow \int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\ \forall \alpha \neq -1$$

$$\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|\,,\ \forall x \neq 0$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \Rightarrow \int e^x\,dx = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = (\log a)a^x \Rightarrow \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \Rightarrow \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \Rightarrow \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \Rightarrow \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx = -\cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \Rightarrow \int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x$$
$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x \Rightarrow \int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x$$
$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{argsenh} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \operatorname{argsenh} x$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{argcosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{argcosh} x$$

Temos também que

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \Rightarrow \int (f+g) \, dx = \int f \, dx + \int g \, dx$$

e

$$\frac{d}{dx}(cf) = c\frac{df}{dx} \Rightarrow \int cf \, dx = c \int f \, dx \,, \text{ para qualquer constante } c \in \mathbb{R}.$$

Usando estes factos, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $2x^5$	2) $x + \sqrt{x}$	3) $\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{x}{2}}$
4) $\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{4}$	5) $\frac{x^2 - 2x + 5}{\sqrt{x}}$	6) $\frac{\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}$
7) $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^2$	8) $(x^2+1)^3$	9) $\frac{6}{\operatorname{sen}^2(x)}$
10) $\frac{5}{\cos^2(x)}$	11) $\tan^2(x)$	12) $\cot^2(x)$
13) $\frac{4}{1+x^2}$	14) $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$	15) $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$
16) $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	17) e^{x+3}	18) e^{x-1}
19) $3e^x + \sqrt{x}$	20) 2^x	21) $\frac{a^x}{b^x}$
22) $\frac{1}{3x}$	23) $\frac{3}{x} + \sqrt{x}$	24) $3\operatorname{sen}(x)$
25) $2\cos(x)$	26) $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(x)}$	27) $2\operatorname{senh}(x) + 3\cosh(x)$

II. Primitivas Quase-Imediatas.

A fórmula para a derivada da função composta

$$(F(u(x)))' = F'(u(x)) \cdot u'(x)$$

diz-nos que

$$F(x) = \int f(x)\,dx \Rightarrow F(u(x)) = \int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx\,.$$

Esta fórmula, combinada com a tabela anterior de primitivas imediatas, conduz à seguinte tabela de primitivas quase-imediatas.

$$\int u(x)^\alpha u'(x)\,dx = \frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,,\ \forall \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \log|u(x)|$$

$$\int e^{u(x)} u'(x)\,dx = e^{u(x)}$$

$$\int a^{u(x)} u'(x)\,dx = \frac{a^{u(x)}}{\log a}\,,\ \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\int \cos(u(x)) u'(x)\,dx = \operatorname{sen}(u(x))$$

$$\int \operatorname{sen}(u(x)) u'(x)\,dx = -\cos(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}\,dx = \tan(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2(u(x))}\,dx = -\cot(u(x))$$

$$\int \cosh(u(x)) u'(x)\,dx = \operatorname{senh}(u(x))$$

$$\int \operatorname{senh}(u(x)) u'(x)\,dx = \cosh(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}\,dx = \operatorname{arcsen}(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \arctan(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}}\,dx = \operatorname{argsenh}(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}\,dx = \operatorname{argcosh}(u(x))$$

Temos assim por exemplo que

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\log|\cos x|$$

e

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx = \int \frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x} = \log|\operatorname{sen} x|$$

Usando estes factos, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$	2) $x\sqrt{x^2+1}$	3) $x\sqrt{1-x^2}$
4) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	5) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	6) $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$
7) $\operatorname{sen}(2x)$	8) $\cos(3x)$	9) $\operatorname{sen}(x)\cos(x)$
10) $x\operatorname{sen}(x^2)$	11) $x\cos(x^2)$	12) $x\cos(x^2+1)$
13) $\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	14) $\frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$	15) $\frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^2}$
16) $x^2\cos(x^3-1)$	17) $x^2\operatorname{sen}(x^3+1)$	18) $x\operatorname{sen}(x^2)\cos(x^2)$
19) $\operatorname{sen}^3(x)\cos(x)$	20) $\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$	21) $\operatorname{sen}(x)\cos^2(x)$
22) e^{5x}	23) $\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{e^{4x}}$	24) xe^{x^2}
25) xe^{-x^2}	26) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$	27) $\frac{e^{1/x}}{x^2}$
28) $e^x e^{e^x}$	29) $\frac{1}{3x-7}$	30) $\frac{1}{4-5x}$
31) $\frac{x}{1+x^2}$	32) $\frac{x}{x^2+4}$	33) $\frac{x^2}{1+x^3}$
34) $\frac{e^x}{2+e^x}$	35) $\frac{e^{x+1}}{1+e^x}$	36) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$
37) $e^x\operatorname{sen}(e^x)$	38) $e^{\operatorname{sen}^2(x)}\operatorname{sen}(2x)$	39) $\frac{\log x}{x}$
40) $\frac{\cos(\log x)}{x}$	41) $\frac{\log(\log x)}{x\log x}$	42) $\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$
43) $\tan(2x)$	44) $\cot(5x-7)$	45) $\frac{\tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
46) $\frac{1}{\operatorname{sen}^2(3x)}$	47) $\frac{\tan x}{\cos^2(x)}$	48) $\tan^3(x)$

49) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 50) $\dfrac{1}{a^2+x^2}$ 51) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

52) $\dfrac{x^3}{x^8+1}$ 53) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ 54) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

55) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ 56) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ 57) $\operatorname{senh}(2x+1)\cosh(2x+1)$

III. Primitivas de Funções Racionais.

É possivel primitivar qualquer função racional, i.e. qualquer função $f = p/q$ com p e q polinómios, em termos de funções elementares (cf. Spivak). Ilustramos aqui esse facto quando p é um polinómio de grau ≤ 2 e q é um polinómio do terceiro grau da forma $q(x) = x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$. A primitiva de $f = p/q$ depende essencialmente da natureza deste polinómio denominador.

Caso 1. O polinómio denominador q tem 3 raizes reais distintas, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,,\ \text{com } \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}\,,\ \text{com } A,B,C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| + B\log|x-\beta| + C\log|x-\gamma|\,.$$

Caso 2. O polinómio denominador q tem uma raiz real simples e outra raiz real dupla, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^2\,,\ \text{com } \alpha,\beta \in \mathbb{R}\,,\ \alpha \neq \beta.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{(x-\beta)^2}\,,\ \text{com } A,B,C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| + B\log|x-\beta| - \frac{C}{x-\beta}\,.$$

Caso 3. O polinómio denominador q tem uma raiz real tripla, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)^3\,,\ \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}\,,\ \text{com } A,B,C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| - \frac{B}{x-\alpha} - \frac{C}{2(x-\alpha)^2}\,.$$

Caso 4. O polinómio denominador q tem apenas uma raiz real simples, i.e.

$$q(x) = (x-\alpha)((x-a)^2+b^2)\,,\ \text{com } \alpha, a, b \in \mathbb{R}\,,\ b \neq 0.$$

Neste caso, a função racional $f = p/q$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,,\ \text{com } A, B, C \in \mathbb{R},$$

pelo que

$$\int f(x)\,dx = A\log|x-\alpha| + \int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,dx\,,$$

onde a última primitiva é quase-imediata, podendo ser expressa usando as funções logaritmo e arco tangente.

Usando estes factos, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$	2) $\dfrac{1}{x^2-1}$	3) $\dfrac{x^4}{1-x}$
4) $\dfrac{x}{x^2-25}$	5) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$	6) $\dfrac{x}{x^2+x+1}$
7) $\dfrac{x+4}{x^2+1}$	8) $\dfrac{2x}{(x^2-1)(x+1)}$	9) $\dfrac{6+x}{(4-x^2)(x+2)}$
10) $\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)(x+1)}$	11) $\dfrac{3x+1}{x^3-x}$	12) $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$
13) $\dfrac{3x-1}{(x^2-1)(x+1)}$	14) $\dfrac{x+10}{(x^2-4)(x+2)}$	15) $\dfrac{1+x^2}{x^3-2x^2+x}$
16) $\dfrac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x-3)}$	17) $\dfrac{x^2-4x+6}{(x+2)(x-1)^2}$	18) $\dfrac{3x^2+3x+2}{(x-1)(x^2+2x+1)}$
19) $\dfrac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}$	20) $\dfrac{1+x}{1-x^4}$	21) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)}$
22) $\dfrac{x-2}{(1+x^2)(x+3)}$	23) $\dfrac{x+2}{(4-x^2)(1+x^2)}$	24) $\dfrac{x^2+x-1}{(1+x^2)(x+3)}$
25) $\dfrac{x^2-3x+4}{(x-2)(x^2-2x+2)}$	26) $\dfrac{x^2-x}{(x-2)(x^2-2x+2)}$	27) $\dfrac{2x^2+4x+3}{(1+x)(x^2+2x+2)}$
28) $\dfrac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}$	29) $\dfrac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$	30) $\dfrac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}$

IV. Primitivação por Partes.

A fórmula para a derivada do produto de duas funções u e v,

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Leftrightarrow u \cdot v' = (u \cdot v)' - u' \cdot v\,,$$

dá origem à **fórmula de primitivação por partes**:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx\,.$$

Esta fórmula é particularmente útil quando a função que queremos primitivar pode ser expressa como o produto de uma função u, cuja derivada é mais simples do que u, com uma função v' com primitiva imediata ou quase-imediata v.

Há dois truques que são usados de forma frequente na primitivação por partes. O primeiro é escrever $\int f(x)\, dx = \int 1 \cdot f(x)\, dx$ e considerar $u = f$ e $v' = 1$. Obtem-se então que

$$\int f(x)\, dx = x \cdot f(x) - \int x \cdot f'(x)\, dx\,.$$

Por exemplo,

$$\int \log x\, dx = \int 1 \cdot \log x\, dx = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \cdot \log x - \int 1\, dx = x \log x - x\,.$$

O segundo truque é usar primitivação por partes para encontrar $\int f$ em termos da própria $\int f$ e depois resolver em ordem à $\int f$. Por exemplo,

$$\int \frac{\log x}{x}\, dx = \int \frac{1}{x} \cdot \log x\, dx = \log x \cdot \log x - \int \log x \cdot \frac{1}{x}\, dx = (\log x)^2 - \int \frac{\log x}{x}\, dx$$

pelo que

$$2 \int \frac{\log x}{x}\, dx = (\log x)^2 \Rightarrow \int \frac{\log x}{x}\, dx = \frac{(\log x)^2}{2}\,.$$

Usando estes factos, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $x \operatorname{sen} x$	2) $x \cos x$	3) xe^x
4) $x \log x$	5) $(\log x)^2$	6) $x^2 \operatorname{sen} x$
7) $x^2 \cos x$	8) $x^2 e^x$	9) $x^2 \log(1 + x)$
10) $\operatorname{sen}^2(x)$	11) $\cos^2(x)$	12) $\operatorname{sen}^3(x)$
13) $\cos^3(x) \operatorname{sen}^2(x)$	14) $x^3 e^{x^2}$	15) $e^{ax} \operatorname{sen}(bx)$
16) $\cos(\log x)$	17) $\operatorname{arcsen} x$	18) $\arctan x$
19) $x \arctan x$	20) $\sqrt{x} \arctan(1/\sqrt{x})$	21) $\sqrt{x} \arctan(\sqrt{x})$
22) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$	23) $\dfrac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}$	24) $(\log x)^3$

25) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$ 26) $\sqrt{x}\log x$ 27) $x(\log x)^2$

28) $\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ 29) $\dfrac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}}$ 30) $\cos(x)\log(1+\cos x)$

31) $\operatorname{sen}(x)\log(1+\operatorname{sen} x)$ 32) $\cosh(x)\cos(x)$ 33) $x^2 \operatorname{senh} x$

34) $x^2\cosh x$ 35) $\operatorname{senh}^2(x)$ 36) $\cosh^2(x)$

V. Primitivação por Substituição.

A fórmula para a derivada da função composta, já referida nesta ficha, dá origem à **fórmula de primitivação por substituição**:

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(u(t))u'(t)\,dt\right)_{t=u^{-1}(x)}.$$

O procedimento associado à utilização desta fórmula para determinar $\int f(x)\,dx$ pode ser resumido nos seguintes 3 passos:

(i) considerar a substituição $x = u(t)$ e $dx = u'(t)\,dt$ em $\int f(x)\,dx$;
(ii) encontrar $\int f(u(t))u'(t)\,dt$ como função elementar da variável t;
(iii) fazer a substituição inversa $t = u^{-1}(x)$ na função elementar obtida em (ii).

Usando a substituição indicada, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $\dfrac{5}{2(x+1)(\sqrt{x}+2)}$, $x = t^2$ 2) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$, $x-1 = t^2$

3) $\dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$, $1-x = t^2$ 4) $\dfrac{1}{(2+x)\sqrt{x+3}}$, $x+3 = t^2$

5) $\dfrac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}$, $x+2 = t^2$ 6) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$, $x+1 = t^2$

7) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+2x}}$, $1+2x = t^2$ 8) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}$, $x = t^3$

9) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, $x = t^6$ 10) $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$, $t^2 = \dfrac{x}{x+2}$

11) $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $t^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$ 12) $\dfrac{1}{1+e^x}$, $t = e^x$

13) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$, $t^2 = 1+e^x$ 14) $\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}$, $t = e^x$

15) $\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}\,,\ t = e^{2x}$

16) $\dfrac{1}{x(1+\log^2(x))}\,,\ t = \log x$

17) $\dfrac{\log x}{x(\log(x)-1)^2}\,,\ t = \log x$

18) $\dfrac{1}{x\log x(1-\log x)}\,,\ t = \log x$

19) $\dfrac{\cos x}{4+\operatorname{sen}^2(x)}\,,\ t = \operatorname{sen} x$

20) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x)}}\,,\ t = \operatorname{sen} x$

21) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{4+\cos^2(x)}\,,\ t = \cos x$

22) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}\,,\ t = \cos x$

23) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos^2(x)}\,,\ t = \operatorname{sen} x$

24) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x-\operatorname{sen}^2(x)}\,,\ t = \cos x$

25) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{(1-\operatorname{sen} x)\cos^2(x)}\,,\ t = \operatorname{sen} x$

26) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos x(1+\cos^2(x))}\,,\ t = \cos x$

27) $\dfrac{1}{\cos x}\,,\ t = \operatorname{sen}(x)$

28) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\,,\ t = \cos(x)$

29) $\dfrac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}\,,\ t = \operatorname{sen}(x)$

30) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x(1+\cos x)}\,,\ t = \cos(x)$

31) $\dfrac{1}{\cosh x}\,,\ t = \operatorname{senh}(x)$

32) $\dfrac{1}{\operatorname{senh} x}\,,\ t = \cosh(x)$

33) $\dfrac{1}{2+\tan x}\,,\ t = \tan x$

34) $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\,,\ t = \tan x$

35) $\sqrt{1+x^2}\,,\ x = \tan t$

36) $\sqrt{1+x^2}\,,\ x = \operatorname{senh} t$

37) $\sqrt{x^2-1}\,,\ x = \dfrac{1}{\cos t}$

38) $\sqrt{x^2-1}\,,\ x = \cosh t$

39) $\sqrt{1-x^2}\,,\ x = \operatorname{sen} t$

40) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,,\ x = \operatorname{sen} t$

41) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,,\ t^2 = 1-x^2$

42) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,,\ t^2 = 1+x^2$

43) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,,\ x = \tan t$

44) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,,\ x = \operatorname{senh} t$

45) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,,\ t^2 = x^2-1$

46) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,,\ x = \dfrac{1}{\cos t}$

47) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,,\ x = \cosh t$

48) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,,\ x = \operatorname{sen}^2(t)$

VI. Treino Complementar.

Usando qualquer um dos métodos de primitivação indicados anteriormente, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $e^{x-1}(1+e^x)$	2) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}$	3) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$
4) $\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$	5) $\dfrac{1+x}{1+x^2}$	6) $\dfrac{2x}{x^2-4x+3}$
7) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$	8) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$	9) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$
10) $\dfrac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$	11) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$	12) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$
13) $\dfrac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}$	14) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$	15) $\dfrac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}$
16) $\log(\cos x)\tan x$	17) $\dfrac{\operatorname{sen}^3(x)}{\cos^2(x)}$	18) $\dfrac{\tan x}{\cos^3(x)}$
19) $x\tan^2(x)$	20) $\dfrac{1}{\cos^3(x)}$	21) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3(x)}$
22) $\dfrac{\arctan x}{x^2}$	23) $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$	24) $x\arctan(1+x)$
25) $x^2\arctan x$	26) $\dfrac{x\arctan x}{(1+x^2)^3}$	27) $\arctan(\sqrt{x})$
28) $\log(\sqrt{1+x^2})$	29) $x\log(\sqrt{1+x^2})$	30) $\log(a^2+x^2)$
31) $\operatorname{arcsen}(1/x)$	32) $x\operatorname{arcsen}(1/x)$	33) $\operatorname{arcsen}(\sqrt{x})$
34) $e^{\sqrt{x}}$	35) $\log(x+\sqrt{x})$	36) $(\operatorname{arcsen} x)^2$
37) $\dfrac{\log x}{(1+x)^2}$	38) $e^x\log(1+e^{2x})$	39) $\dfrac{x+1}{x^5+4x^3}$
40) $\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$	41) $\dfrac{1}{x^4+1}$	42) $\sqrt{\tan x}$
43) $\dfrac{2x}{(x^2+x+1)^2}$	44) $\dfrac{3x}{(x^2+x+1)^3}$	45) $\dfrac{1}{x^6+1}$