Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE – 1º SEM. 2006/07
6ª FICHA DE EXERCÍCIOS

CÁLCULO INTEGRAL

I. Treino Complementar de Primitivas.

Usando qualquer um dos métodos de primitivação indicados anteriormente, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções.

1) $e^{x-1}(1+e^x)$ 2) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}$ 3) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$

4) $\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$ 5) $\dfrac{1+x}{1+x^2}$ 6) $\dfrac{2x}{x^2-4x+3}$

7) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ 8) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ 9) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

10) $\dfrac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$ 11) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$ 12) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

13) $\dfrac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}$ 14) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ 15) $\dfrac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}$

16) $\log(\cos x)\tan x$ 17) $\dfrac{\operatorname{sen}^3(x)}{\cos^2(x)}$ 18) $\dfrac{\tan x}{\cos^3(x)}$

19) $x\tan^2(x)$ 20) $\dfrac{1}{\cos^3(x)}$ 21) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3(x)}$

22) $\dfrac{\arctan x}{x^2}$ 23) $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ 24) $x\arctan(1+x)$

25) $x^2\arctan x$ 26) $\dfrac{x\arctan x}{(1+x^2)^3}$ 27) $\arctan(\sqrt{x})$

28) $\log(\sqrt{1+x^2})$ 29) $x\log(\sqrt{1+x^2})$ 30) $\log(a^2+x^2)$

31) $\operatorname{arcsen}(1/x)$ 32) $x\operatorname{arcsen}(1/x)$ 33) $\operatorname{arcsen}(\sqrt{x})$

34) $e^{\sqrt{x}}$ 35) $\log(x+\sqrt{x})$ 36) $(\operatorname{arcsen} x)^2$

37) $\dfrac{\log x}{(1+x)^2}$ 38) $e^x\log(1+e^{2x})$ 39) $\dfrac{x+1}{x^5+4x^3}$

40) $\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$ 41) $\dfrac{1}{x^4+1}$ 42) $\sqrt{\tan x}$

43) $\dfrac{2x}{(x^2+x+1)^2}$ 44) $\dfrac{3x}{(x^2+x+1)^3}$ 45) $\dfrac{1}{x^6+1}$

46) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x}$ 47) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x+\cos x}$ 48) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$

II. Definição de Integral e Critérios de Integrabilidade.

1) Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, com $a < b < c < d$, e $f : [a, d] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, d]$. Prove que f é integrável em $[b, c]$.

2) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, $c \in [a, b]$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que $g(x) = f(x)$, para $x \neq c$. Mostre que g é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b g = \int_a^b f$.

3) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções tais $f(x) = g(x)$ excepto possivelmente num número finito de pontos. Mostre que se f é integrável em $[a, b]$ então g também é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b f = \int_a^b g$.

4) Chama-se **função seccionalmente contínua** a uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que é contínua excepto num número finito de pontos $\{c_1, \ldots, c_n\}$, incluindo possivelmente os extremos a e b, e em que todos os limites laterais $\lim_{x \to c_i^\pm} f$, $\lim_{x \to a^+} f$, $\lim_{x \to b^-} f$ existem e são finitos. Mostre que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua então f é integrável em $[a, b]$.

5) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa. Mostre que se $\int_a^b f = 0$ então f é identicamente nula.

6) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa (i.e. $f(x) \geq 0\,,\ \forall x \in [a, b]$). Mostre que se existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) > 0$ então $\int_a^b f > 0$.

7) Seja V o espaço vectorial das funções contínuas no intervalo $[a, b]$. Dada uma função $f \in V$ considere a transformação linear $T_f : V \to \mathbb{R}$ definida por

$$T_f(g) = \int_a^b f(x)g(x)\, dx \ ,\ g \in V \ .$$

Mostre que T_f é identicamente nula se e só se f o for.

8) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que se $\int_a^b f = 0$ então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

9) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Mostre que se $\int_a^b f = \int_a^b g$ então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = g(c)$.

10) Considere a função $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x\,, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostre que

$$\overline{\int_0^1} h = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} \ .$$

O que pode dizer quanto à integrabilidade de h em $[0, 1]$?
<u>Sugestão</u>: Poderá usar, sem demonstrar, o seguinte facto:

$$\sup_{[a,b]} h = b\,, \ \text{para todo o intervalo } [a, b] \text{ contido em } [0, 1].$$

11) Considere a função $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} -x\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mostre que

$$\underline{\int_0^1} h = \int_0^1 (-x)\ dx = -\frac{1}{2}\ .$$

O que pode dizer quanto à integrabilidade de h em $[0,1]$?
Sugestão: Poderá usar, sem demonstrar, o seguinte facto:

$$\inf_{[a,b]} h = -b\,, \text{ para todo o intervalo } [a,b] \text{ contido em } [0,1].$$

12) Seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt\ ,$$

onde f é uma função limitada e integrável no intervalo $[a,b]$. Mostre que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq K|x - y|\ ,\ \forall x, y \in [a,b]\ .$$

13) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $m \leq f(x) \leq M\,,\ \forall\, x \in [a,b]$. Mostre que

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)\mu\,,$$

para algum $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq \mu \leq M$.

14) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)f(\xi)\,,$$

para algum $\xi \in [a,b]$.

15) Mostre que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável então $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ também é integrável.

16) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Mostre que se f é integrável em $[a,x]$ para todo o $x \in [a,b[$, então f é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f\ .$$

III. Integral Indefinido e Teorema Fundamental do Cálculo.

1) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Mostre que se $\int_c^d f = \int_c^d g$ para quaisquer $c, d \in [a, b]$, então $f(x) = g(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

2) Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[-1, 1]$, contínua em $[-1, 1] \setminus \{0\}$ e com limites laterais finitos em $x = 0$:

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \quad \text{e} \quad f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x)\,.$$

Mostre que a função $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\ dt$$

é diferenciável em $x = 0$ e que $\varphi'(0) = f(0^-) + f(0^+)$.
Sugestão: para calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x}$ deverá usar primeiro a regra de Cauchy e analisar em seguida os casos $x \to 0^-$ e $x \to 0^+$ separadamente.

3) Considere a função $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida pela identidade:

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \cdot e^{\frac{t^2+1}{t}}\ dt\,.$$

(a) Mostre que $F(1/x) = -F(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.
(b) Mostre que F é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e calcule $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

4) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(x) = \int_0^x x f(t)\ dt\,.$$

Mostre que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

5) Sendo F a função definida em $\mathbb{R}$ pela seguinte expressão, calcule $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

$$(a)\ F(x) = \int_x^0 \operatorname{sen}^2 t\ dt \qquad (b)\ F(x) = \int_x^{x^2} \log(1+t^2)\ dt \qquad (c)\ F(x) = \int_0^x \frac{e^{x+t}}{t^2+1}\ dt$$

6) Mostre que os valores das seguintes expressões não dependem de x.

$$(a)\ \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\ dt \qquad (b)\ \int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt\,,\ x \in [0, \pi/2]$$

7) Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pela fórmula

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\ dt\,.$$

Mostre que

$$\int_0^1 F(x)\ dx = F(1) + \frac{1}{2e} - \frac{1}{2}\,.$$

8) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que f é ímpar (i.e. $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$) se e só se

$$\int_{-x}^{x} f(t)\, dt = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

9) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que f é par (i.e. $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$) se e só se

$$\int_{-x}^{x} f(t)\, dt = 2\int_{0}^{x} f(t)\, dt, \ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

10) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par, tal que

$$\log(1 + f(x)) = \int_{0}^{x^2} \frac{e^t}{1 + f(\sqrt{t})}\, dt\,.$$

11) Determine a única função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não identicamente nula, que satisfaz a equação

$$\int_{0}^{x} f^3(t)\, dt = \left(\int_{0}^{x} f(t)\, dt\right)^2\,.$$

12) Determine a única função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par e não identicamente nula, que satisfaz a equação

$$f^2(x) = \int_{0}^{x^2} f(\sqrt{t})\, dt\,.$$

13) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(x) < 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Justifique que a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \int_{-x}^{x^3} f(t)\, dt\,,$$

é diferenciável e mostre que $\varphi'(x) < 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

14) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Justifique que a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \int_{-x}^{x^3} f(t)\, dt\,,$$

é diferenciável e mostre que $\varphi'(x) > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

15) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não nula, tal que

$$f^2(x) = \int_{0}^{x} f(t)\, \frac{t}{1+t^2}\, dt\,.$$

16) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não nula, tal que

$$f^2(x) = \int_{0}^{x} f(t)\, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\, dt\,.$$

17) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não nula, tal que

$$f^2(x) = \int_0^x f(t)\,\frac{\operatorname{sen} t}{2 - \cos t}\;dt\,.$$

18) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não nula, tal que

$$f^2(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x f(t)\,\frac{\cos t}{2 + \operatorname{sen} t}\;dt\,.$$

19) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ímpar e não identicamente nula, tal que

$$(f(x))^3 = \int_{-x}^x f^2(t)\cos(t)\;dt\,.$$

20) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ímpar e não identicamente nula, tal que

$$(f(x))^3 = \int_{-x}^x \frac{f^2(t)}{1+t^2}\;dt\,.$$

21) Determine uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^x f(t)\;dt = \int_x^1 t^4 f(t)\;dt + \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6} + k\,.$$

22) Determine uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^x f(t)\;dt = \int_x^1 t^2 f(t)\;dt + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + k\,.$$

23) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\cos(f(x)) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(f(\sqrt{t}))\cos(t)\;dt\,.$$

24) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{sen}(f(x)) = \int_0^{x^2} \cos(f(\sqrt{t}))\operatorname{sen}(t)\;dt\,.$$

25) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, positiva, tal que

$$\log(f(x)) = \int_0^x \frac{t}{f(t)\sqrt{1+t^2}}\;dt\,.$$

26) Determine uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, positiva, tal que

$$\log(f(x)) = \int_0^x \frac{t}{f(t)\,(1+t^2)}\;dt\;.$$

IV. Regra de Barrow e Cálculo de Áreas.

1) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = e^x\,, \quad y = 1 - x \quad \text{e} \quad x = 1\,.$$

2) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = e^{-x}\,, \quad y = 1 + x \quad \text{e} \quad x = -1\,.$$

3) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = xe^{x-1}\,, \quad y = 1 \quad \text{e} \quad x = 0\,.$$

4) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = (1-x)e^{-x}\,, \quad y = 1 \quad \text{e} \quad x = 1\,.$$

5) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = \log x\,, \quad y = 1 - x \quad \text{e} \quad y = 1\,.$$

6) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = \log(1+x)\,, \quad y = -\log(1+x) \quad \text{e} \quad x = e - 1\,.$$

7) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = \log(2+x)\,, \quad y = -\log(2+x) \quad \text{e} \quad x = e - 2\,.$$

8) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = x^2 - \frac{\pi^2}{4} \quad \text{e} \quad y = \cos x\,.$$

9) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = x^2\,, \quad y = \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad y = x\,.$$

10) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = e^x\,, \quad y = e^{-x} \quad \text{e} \quad x = 2\,.$$

11) Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas
$$y = \log(1+x^2) \quad \text{e} \quad y = \log(2)\,.$$

12) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições
$$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad 0 \le y \le x \operatorname{sen} x\,.$$

13) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições
$$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad 0 \le y \le x \cos x\,.$$

14) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições
$$1 \leq x \leq e \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x(1+\log^2(x))}\,.$$

15) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições
$$1 \leq x \leq \sqrt{e} \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2(x)}}\,.$$

16) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições
$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

17) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições
$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,.$$

18) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições
$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}\,.$$

19) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições
$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+2}}\,.$$

20) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições
$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\,.$$

21) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições
$$0 \leq x \leq \log 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{1+e^x}\,.$$

22) Determine a área do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições
$$0 \leq x \leq \log 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{3-e^x}\,.$$