Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
LEIC-TAGUS, LERCI, LEGI E LEE – 1º SEM. 2006/07
7ª FICHA DE EXERCÍCIOS

I. Polinómio e Teorema de Taylor.

1) Determine o polinómio de Taylor de grau 3 em $a = 0$ das funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas respectivamente por

$$f(x) = e^{\operatorname{sen} x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\, dt\,.$$

2) Determine o polinómio de Taylor de grau 5 em $a = 0$ da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{\cos x}\,.$$

3) Use o polinómio de Taylor para escrever cada um dos seguintes polinómios como um polinómio em potências de $(x - 3)$.

i) $x^2 - 4x - 9$ *ii)* $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$ *iii)* x^5

4) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^5(\mathbb{R})$ com polinómio de Taylor de grau 5 em $a = 0$ dado por:

$$i)\ p_{5,0}(x) = 1 + x^4\,; \qquad ii)\ p_{5,0}(x) = x^3 - x^5\,.$$

Em cada um dos casos, determine $f^{(k)}(0)$, para $k = 0, 1, \ldots, 5$, e indique justificando se f tem ou não um extremo local no ponto zero.

5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^5(\mathbb{R})$ com polinómio de Taylor de grau 5 em $a = 1$ dado por

$$p_{5,1}(x) = \frac{1}{2}x^2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\,.$$

Determine $f^{(k)}(1)$, para $k = 0, 1, \ldots, 5$, e indique justificando se f tem ou não um extremo local no ponto um.

6) Prove, usando o Teorema de Taylor, que

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| < \frac{1}{6}\,,\ \forall x \in [0, 1]\,.$$

7) Prove, usando o Teorema de Taylor, que

$$\left| \operatorname{sen}(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \right| < 0.01\,,\ \forall x \in [0, 1]\,.$$

8) Prove, usando o Teorema de Taylor, que

$$\left| \cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) \right| < 0.1\,,\ \forall x \in [0, 2]\,.$$

9) Prove, usando o Teorema de Taylor, que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $(n+1)$-vezes diferenciável e

$$f^{(n+1)}(x) = 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

então f é um polinómio de grau menor ou igual a n.

II. Sucessões.

1) Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões.

$a)\ x_n = \dfrac{2n+1}{3n-1}$ $\qquad b)\ x_n = \dfrac{2n+3}{3n+(-1)^n}$ $\qquad c)\ x_n = n - \dfrac{n^2}{n+2}$

$d)\ x_n = \dfrac{n+\cos(n)}{2n-1}$ $\qquad e)\ x_n = \dfrac{n^2-2}{5n^2}$ $\qquad f)\ x_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$

$g)\ x_n = \sqrt{n} - \dfrac{n}{\sqrt{n}+2}$ $\qquad h)\ x_n = \dfrac{\sqrt{n^4-1}}{n^2+3}$ $\qquad i)\ x_n = (-1)^n \dfrac{n}{1+n^2}$

$j)\ x_n = \dfrac{n^2-1}{\sqrt{3n^4+3}}$ $\qquad k)\ x_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2n+1}$ $\qquad l)\ x_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}$

$m)\ x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\qquad n)\ x_n = \sqrt{n(n+1)} - n$ $\qquad o)\ x_n = \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}-1}$

$p)\ x_n = \dfrac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}$ $\qquad q)\ x_n = na^n\,,\ \text{com } |a|<1$ $\qquad r)\ x_n = \dfrac{2^{2n}+6n}{3^n-4^{n+2}}$

$s)\ x_n = \dfrac{2^{2n}-3^n}{2^n-3^{2n}}$ $\qquad t)\ x_n = \dfrac{(3^n)^2}{1+7^n}$

2) Sendo (u_n) e (v_n) sucessões de termos positivos tais que

$$1 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1 + \frac{1}{n} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,,$$

prove que (u_n) converge sse (v_n) converge. Mostre também que, quando existem, os seus limites são iguais.

3) Prove que se $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ então $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = 0$.

4) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n+3}{4} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 3/2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

5) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 3 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \sqrt{2x_n+1} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente decrescente e que $x_n > 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

6) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \sqrt{2x_n+1} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 3$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

7) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \sqrt{\frac{3 + x_n^2}{2}} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

8) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente crescente e que $x_n < 3$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

9) Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 3 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Prove que (x_n) é estritamente decrescente e que $x_n > 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
(b) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

10) Considere as expressões

$$x_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Verifique que definem, por recorrência, uma sucessão (x_n), i.e. verifique que $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, por forma a que a segunda expressão faça sentido.
(b) Prove que $x_n \geq 2$ e $x_{n+1} \leq x_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$.
(c) Mostre que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

11) Mostre que as expressões

$$x_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n}{1 + 2x_n} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}$$

definem por recorrência uma sucessão (x_n) que é convergente. Calcule o seu limite.

12) Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões.

$a)$ $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+7}$ $\qquad b)$ $x_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}$ $\qquad c)$ $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$d)$ $x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n}$ $\qquad e)$ $x_n = \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{2n+3}$ $\qquad f)$ $x_n = \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{1-n}$

$g)$ $x_n = \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{n/2}$ $\qquad h)$ $x_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n-1}$ $\qquad i)$ $x_n = \left(\frac{2n}{n+1} - 1\right)^{n}$

13) Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões.

a) $x_n = \sqrt[n]{n}$ *b)* $x_n = \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$ *c)* $x_n = \sqrt[n]{n^2+n}$

d) $x_n = \sqrt[n]{2^n+1}$ *e)* $x_n = \sqrt[n]{2^n+n^2}$ *f)* $x_n = \sqrt[n]{3^n+2^{2n}}$

g) $x_n = \left(\frac{n-1}{2n^2+1}\right)^{\frac{2}{n}}$ *h)* $x_n = \left(1-\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$ *i)* $x_n = \left(\frac{2^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2n}}$

III. Séries Numéricas.

1) Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$ *c)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} = 9$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}} = \frac{50}{3}$ *e)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} = \frac{5}{3}$

2) Determine a natureza das seguintes séries.

a) $\sum \frac{n-2}{3n+1}$ *b)* $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ *c)* $\sum \frac{\sqrt{n-1}}{n^2+2}$ *d)* $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

e) $\sum \frac{n+1}{n^3+1}$ *f)* $\sum \frac{n}{\sqrt{n^2(n+1)}}$ *g)* $\sum \frac{n!}{(n+2)!}$ *h)* $\sum \frac{n^2}{n^3+1}$

i) $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ *j)* $\sum \frac{5^n}{4^n+1}$ *k)* $\frac{2^n}{3^n+1}$ *l)* $\frac{2^{2n}}{3^n+1}$

3) Determine a natureza das seguintes séries.

a) $\sum \frac{n^{1000}}{(1,001)^n}$ *b)* $\sum \frac{2^n n}{e^n}$ *c)* $\sum \frac{n^3}{3^n}$ *d)* $\sum \frac{n^2}{n!}$

e) $\sum \frac{(1000)^n}{n!}$ *f)* $\sum \frac{n!}{(2n)!}$ *g)* $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ *h)* $\sum \frac{n!}{n^n}$

i) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$ *j)* $\frac{3^n n!}{n^n}$

4) Determine a natureza das seguintes séries.

a) $\sum \frac{\log n}{n}$ *b)* $\sum \frac{1}{\log n}$ *c)* $\sum \frac{1}{n \log n}$ *d)* $\sum \frac{1}{n(\log n)^2}$

e) $\sum \frac{1}{n^2 \log n}$ *f)* $\sum \frac{1}{(\log n)^n}$ *g)* $\sum \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ *h)* $\sum \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

5) Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos tal que $\lim n\, a_n = +\infty$. Mostre que a série $\sum a_n$ é divergente.

6) Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos tal que $\lim n^2 a_n = 0$. Mostre que a série $\sum a_n$ é convergente.

7) Determine se são absolutamente covergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries.

a) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ *b)* $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *c)* $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

d) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2n^2-1}$ *e)* $\displaystyle\sum (-3)^{-n}$ *f)* $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$

g) $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{\log n}{n}$ *h)* $\displaystyle\sum (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ *i)* $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^2}$

8) Mostre que se $\sum |a_n|$ converge então $\sum a_n^2$ também converge. Dê um exemplo em que $\sum a_n^2$ converge mas $\sum |a_n|$ diverge.

IV. Séries de Potências.

1) Para cada uma das seguintes séries de potências, determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

a) $\sum \frac{x^n}{2^n}$	*b)* $\sum \frac{x^n}{(n+1)2^n}$	*c)* $\sum \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$
d) $\sum \frac{(x-1)^n}{3^n+1}$	*e)* $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}(x+1)^n$	*f)* $\sum \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n^2+1}}$
g) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n$	*h)* $\sum \frac{2n}{n^2+1}(x+1)^n$	*i)* $\sum \frac{(-1)^n(x+1)^n}{n^2+1}$
j) $\sum \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}(1-x)^n$	*k)* $\sum \frac{(5x+1)^n}{n^2+1}$	*l)* $\sum \frac{(1-3x)^{2n}}{4^n(n+1)}$
m) $\sum \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n}$	*n)* $\sum \frac{n!}{n^n}x^n$	*o)* $\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

2) Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo a que a série

$$\sum \frac{a^{n+1}}{n+1}x^n$$

seja convergente no ponto $x = -3$ e divergente no ponto $x = 3$.

3) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^{n+1}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = -1$.

4) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = 0$.

5) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{4^{n+1}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = -1$.

V. Séries de Taylor.

1) Desenvolva a função $\log x$ em série de potências de $(x-1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

2) Desenvolva a função $x \log x$ em série de potências de $(x-1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

3) Desenvolva a função $\log(x^2+2x+2)$ em série de potências de $(x+1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

4) Desenvolva a função $1/x$ em série de potências de $(x-1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

5) Desenvolva a função $1/x^2$ em série de potências de $(x-1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

6) Desenvolva a função $1/(x+2)$ em série de potências de $(x+1)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

7) Desenvolva a função $1/(x+2)$ em série de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

8) Desenvolva a função $1/(x+1)$ em série de potências de $(x-2)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

9) Desenvolva a função $1/x$ em série de potências de $(x-2)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

10) Desenvolva a função $1/x^2$ em série de potências de $(x-2)$. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

11) Desenvolva a função $\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\, dt$ em série de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

12) Desenvolva a função $\int_0^x \cos(t^2)\, dt$ em série de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

13) Desenvolva a função $\int_0^x e^{t^2}\, dt$ em série de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

14) Desenvolva a função

$$\varphi(x) = \int_0^{x^2} \log(1+t^2)\, dt$$

em série de potências de x. Qual é o maior intervalo aberto em que a série representa a função? A função φ tem um extremo no ponto zero? Justifique com base na série que obteve para φ.