

# Exame de 1ª época

## Programação Matemática

1º Semestre de 2008/2009

19 de Janeiro de 2009

Duração: 3 horas

**1-** [3 val.] Determine os invólucros afim,  $\text{aff}(S)$ , convexo,  $\text{conv}(S)$ , e cónico,  $\text{cone}(S)$ , para o seguinte conjunto:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2 \wedge |z| = 1\}$$

**2-** [3,5 val.] Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar:} & 2x_1 - x_2 \\ \text{Sujeito a:} & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ \text{Com:} & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Resolva o problema usando o método do Simplex, iniciando com  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$ .

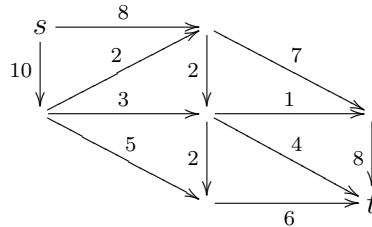
**3-** [3,5 val.] Um governante de um pequeno reino medieval de cinco cidades tinha um serviço de mensageiros que podiam enviar uma mensagem de uma dada cidade para uma outra de acordo com a seguinte tabela de preços (em moedas de cobre):

	A	B	C	D	E
A		1	2		
B	1		2	3	
C	2	2		4	5
D		3	4		2
E			5	2	

Certo dia quis enviar uma mensagem da sua cidade de residência para as restantes quatro cidades a um preço mínimo (assume-se que em cada cidade haviam mensageiros em número suficiente para reenviarem a mensagem a quantas cidades fosse necessário).

- Formalize o problema como problema de árvore geradora mínima.
- Resolva o problema usando o algoritmo de Kruskal e responda qual o valor que o governante teve que pagar pelo envio da mensagem.

4- [3,5 val.] Determine, com o auxílio do algoritmo genérico do fluxo máximo, um fluxo- $st$  com valor máximo e um corte- $st$  de capacidade mínima do seguinte grafo dirigido:



Os números que aparecem sobre as arestas indicam as capacidades destas.

5- [3,5 val.] Uma dada agência de viagens organiza excursões a quatro locais de interesse turístico  $l_1, l_2, l_3$  e  $l_4$ . Um dado dia tem cinco grupos de excursionistas  $g_1, g_2, g_3, g_4$  e  $g_5$  que pretendem visitar os locais  $l_1, l_2, l_3$  e  $l_4$  de acordo com o seguinte quadro:

	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$l_5$
$l_1$	X	X			
$l_2$			X		X
$l_3$		X		X	X
$l_4$	X			X	

Atendendo que cada visita dura uma hora (incluindo tempo de viagem e tempo de permanência no local) e que cada grupo cabe num só autocarro pretende-se arranjar um programa de viagens que satisfaça o que é pedido.

(a) Mostre que é possível arranjar um horário de modo que todas as visitas estarão realizadas num período de 3 horas.

(b) Mostre que o horário da alínea anterior pode ser feito de modo que só sejam necessárias 3 autocarros.

(c) Apresente um horário que nas condições das alíneas anteriores, ou seja todas as visitas serão feitas num máximo de 3 horas usando apenas 3 autocarros.

6- [3 val.] Seja  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  um poliedro **não-vazio**.

Mostre que  $P$  é limitado se e só se  $\text{cone}(\{a_i : i = 1, \dots, m\}) = \mathbb{R}^n$  onde  $\{a_i : i = 1, \dots, m\}$  é o conjunto dos vectores linha da matriz  $A$ .

[Sugestão: Use um corolário do lema de Farkas.]