Exame de 2ª época

Programação Matemática

1^o Semestre de 2009/2010

23 de Janeiro de 2010

Duração: 3 horas

1- [3 val.] Determine os invólucros afim, aff(S), convexo, conv(S), e cónico, cone(S), para o seguinte conjunto:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \wedge z = 0\} \cup \{(0, 0, 1)\}$$

2- [3 val.] Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x & - & y & \leq & \beta \\ & & y & \leq & 0 \\ -x & + & \alpha z & \leq & 1 \end{cases}$$

Determine os valores de α e β para os quais o sistema é inconsistente.

3- [3 val.] Uma cooperativa agrícola possui três quintas de exploração Q_1, Q_2 e Q_3 que produzem 300, 200 e 100 litros de leite por dia respectivamente. Inicialmente a cooperativa recorria a um só centro de embalagem C_1 que empacotava o leite a um preço de 8 cêntimos o litro. Entretanto surgiu a oportunidade de recorrer a um segundo centro de embalagem C_2 que empacota o leite a um preço de 6 cêntimos o litro.

O problema que se coloca é o de redistribuir a produção de leite pelos dos centros de embalagem C_1 e C_2 de modo a minimizar o custo total de produção, sabendo que os custos de transporte do leite das quintas para os centros são dados (em cêntimos por litro) pela seguinte tabela:

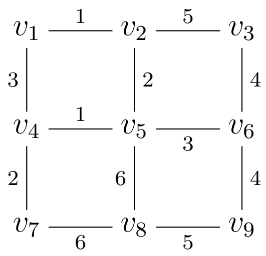
	Q_1	Q_2	Q_3
C_1	2	2	3
C_2	5	3	2

Responda a uma só das seguintes alíneas.

(a) Formalize o problema como problema de programação linear e resolva-o usando o método do Simplex, tomando como solução básica inicial a distribuição original (toda a produção de leite para C_1).

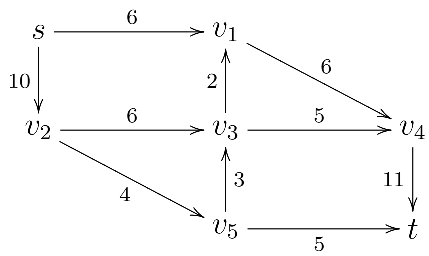
(b) Formalize o problema como problema de fluxo de rede de custo mínimo e resolva-o usando o método do Simplex para redes, tomando como solução básica inicial a distribuição original (toda a produção de leite para C_1).

4- [3 val.] Considere o seguinte grafo



com os pesos das arestas representados sobre estas. Use o algoritmo de Kruskal para determinar uma árvore geradora de peso mínimo.

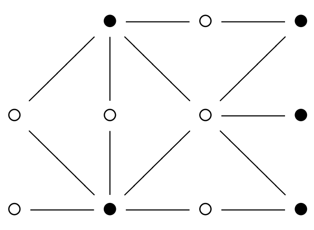
5- [3 val.] Determine, com o auxílio do algoritmo genérico do fluxo máximo, um fluxo-st com valor máximo e um corte-st de capacidade mínima do seguinte grafo dirigido:



Os números que aparecem sobre as arestas indicam as capacidades destas.

6- [2 val.] Considere o seguinte grafo bipartido:

B :



(a) Determine, justificando, o número de matching do grafo B.

(b) Determine, justificando, o índice cromático (ou número de coloração de arestas) do grafo B.

7- [3 val.] Seja $P_G(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ o polinómio cromático de um grafo $G = (V, E)$. Mostre que:

(i) P_G é um polinómio mónico de grau igual à ordem de G. Ou seja, $n = |V|$ e $a_n = 1$;

(ii) O segundo coeficiente de maior grau de P_G é o simétrico do número de arestas. Ou seja, $a_{n-1} = -|E|$;

(iii) Os coeficientes de P_G alternam de sinal. Ou seja, $(-1)^k a_{n-k} \geq 0$.