Exame tipo

Programação Matemática

1^o Semestre de 2008/2009

Duração: 3 horas

1- [3 val.] Determine os invólucros afim, aff(S), convexo, conv(S), e cónico, cone(S), para o seguinte conjunto:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge x + y + z = 1\}$$

2- [3 val.] Considere o seguinte sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & \geq & 1 \\ & & y & & & \geq & 2 \\ 2x & + & y & + & z & \leq & 3 \\ 2\alpha x & + & y & + & \alpha z & \leq & \beta \end{array} \right.$$

Determine os valores de α e β para os quais o sistema é consistente.

3- [4 val.] Pretende-se cultivar um determinado tipo de alga a um custo mínimo.

A alga só se desenvolve em cultura se a água dos tanques contiver as exactas proporções de 100mg de cloreto de sódio por litro de água, 20mg de iodeto de potássio por litro de água e 30mg de fosfato de cálcio por litro de água.

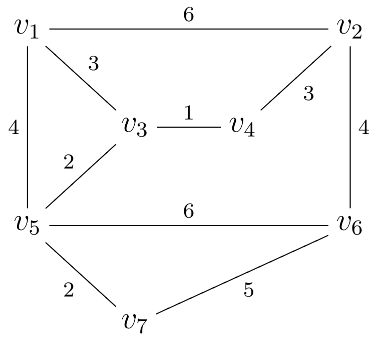
Os custos destes químicos em estado puro são de 4 euros ao quilo para o cloreto de sódio, 10 euros ao quilo para o iodeto de potássio e 20 euros ao quilo para o fosfato de cálcio, mas existem no mercado dois compostos químicos mais baratos. O composto A custa 2 euros o quilo e contém 50% de cloreto de sódio, 20% de iodeto de potássio e 30% de fosfato de cálcio; o composto B custa 1 euro o quilo e contém 40% de cloreto de sódio, 10% de iodeto de potássio e 10% de fosfato de cálcio, sendo o resto substrato inerte (nota: as percentagens referem-se ao peso).

Dadas estas condições, prentende-se fertilizar a água de um tanque de 10 mil litros a custo mínimo, usando estes 5 produtos químicos.

(a) Formalize o problema como problema de programação linear.

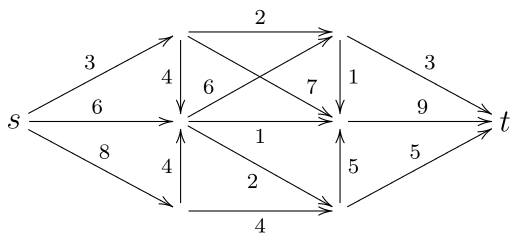
(b) Resolva o problema usando o método do Simplex, tomando como solução básica inicial a que só faz uso dos químicos em estado puro.

4- [3 val.] Considere o seguinte grafo



com os pesos das arestas representados sobre estas. Use o algoritmo de Kruskal para determinar uma árvore geradora de peso mínimo. Represente a árvore obtida graficamente.

5- [4 val.] Determine, com o auxílio do algoritmo genérico do fluxo máximo, um fluxo-st com valor máximo e um corte-st de capacidade mínima do seguinte grafo dirigido:



Os números que aparecem sobre as arestas indicam as capacidades destas.

6- [3 val.] Suponhamos que uma dada escola há 5 turmas t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 e 5 professores p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 que lecionam as turmas (uma hora por turma) de acordo com o seguinte quadro:

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
p_1	X		X		X
p_2		X	X		
p_3				X	X
p_4	X	X		X	
p_5			X	X	

(a) Mostre que é possível arranjar um horário de modo que a escola só esteja ocupada durante 3 horas.

(b) Mostre que o horário da alínea anterior pode ser feito de modo que só sejam necessárias 4 salas.

(c) Apresente um horário que nas condições das alíneas anteriores, ou seja todas as aulas são dadas num máximo de 3 horas em apenas 4 salas.

7- [3 val.] Uma matriz diz-se *duplamente estocástica* se é não-negativa e a soma das entradas de qualquer linha ou coluna é igual a 1. Uma *matriz de permutação* é uma matriz de 0's e 1's em cada linha e cada coluna contém exactamente um 1. Mostre que qualquer matriz duplamente estocástica é uma combinação convexa de matrizes de permutação.

[Sugestão: Mostre que o conjunto das matrizes duplamente estocásticas é um polítopo cujos vértices (ou pontos extremos) são matrizes de permutação.]