1^a **Ficha**

Programação Matemática

1^o Semestre de 2009/2010

Prazo de entregua: 2 de Outubro no início da aula teórica

Resolva três dos seguintes quatro exercícios (as quotações dos problemas são iguais independentemente do número de alíneas de cada um):

1- Determine os invólucros afim, $\mathrm{aff}(S)$, convexo, $\mathrm{conv}(S)$, e cónico, $\mathrm{cone}(S)$, para os seguintes conjuntos:

(a) $S = \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\}$.

(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2 \wedge |z| = 1\}$.

Apresente as soluções recorrendo apenas a igualdades e desigualdes cartesianas com variáveis x, y e z (a menos que o conjunto em questão seja vazio ou $\mathbb{R}^3$).

Exemplo: $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x,y,z) = 1 \wedge f_2(x,y,z) \leq 0, \ldots\}$

2- Diga se são verdadeira ou falsas, justificando com uma demonstração ou um contra-exemplo, as seguintes afirmações:
(a) Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado então $\mathrm{conv}(X)$ é fechado;
(b) Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto então $\mathrm{conv}(X)$ é compacto;
(c) Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto então $\mathrm{conv}(X)$ é aberto.

3- (a) Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $p \in \mathbb{R}^n$ tal que o invólucro cónico de $C - p$, $\mathrm{cone}(C - p)$, é todo o $\mathbb{R}^n$. Mostre que p é ponto interior de C, i.e. $p \in \mathrm{int}(C)$.
(b) Mostre que se $p \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fronteiro de um conjunto convexo $C \subseteq \mathbb{R}^n$, então existe um hiperplano $H_=(a,b) := \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$ que separa fracamente $\{p\}$ de C. Ou seja, $x_0 \in H_=(a,b)$ e $C \subseteq H_\leq(a,b) := \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$.

4- Diga se são verdadeira ou falsas, justificando com uma demonstração ou um contra-exemplo, as seguintes afirmações:
(a) Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo e fechado então X é uma intersecção de semi-espaços fechados;
(b) Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo e aberto então X é uma intersecção de semi-espaços abertos;
(c) Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo então X é uma intersecção de semi-espaços.