4^a **Ficha**

Programação Matemática

1^o Semestre de 2009/2010

Prazo de entregua: 13 de Novembro no início da aula teórica

Resolva três dos seguintes quatro exercícios (as quotações dos problemas são iguais independentemente do número de alíneas de cada um):

1- Considere o seguinte semi-anel (conhecido por *semi-anel tropical*) $(R, \oplus, \otimes)$ com

$$R := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$a \oplus b := \min\{a, b\}$$

$$a \otimes b := a + b$$

Seja $M(n, R)$ o semi-anel das matrizes quadradas de dimenão n associado ao semi-anel R:

$$[a_{ij}] \oplus [b_{ij}] = [c_{ij}] \text{ com } c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$$

$$[a_{ij}] \otimes [b_{ij}] = [c_{ij}] \text{ com } c_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} (a_{ik} \otimes b_{kj})$$

Considere um grafo $G = (V, E)$ com n vértices e uma função comprimento nas arestas $w : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$. Seja $A \in M(n, R)$ uma matriz com valores em R cuja entrada genérica (i, j) é dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w([v_i, v_j]) & \text{se } i \neq j \text{ e } [v_i, v_j] \in E \\ \infty & \text{se } i \neq j \text{ e } [v_i, v_j] \notin E \end{cases}$$

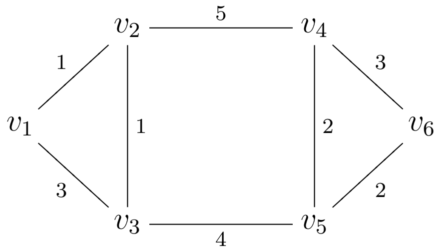
Mostre que a sucessão das potências de $A :\ A, A \otimes A, A \otimes A \otimes A, \ldots, A^n, \ldots$ estabiliza numa matriz D (i.e. existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = D$ para todo o $k > m$) cuja entrada genérica (i, j) é a distância do vértice v_i ao vértice v_j induzida pela função w.

2- No quadro que se segue estão dados os preços em euros das ligações por barco entre várias ilhas de dado arquipélago (se na casa XY não aparece nenhum valor é porque não existe ligação directa entre as ilhas X e Y):

Ilha	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A		1		4					
B	1		5		1				
C		5				1			
D	4				1		2		
E		1		1		4		5	
F			1		4				3
G				2				1	
H					5		1		2
I						3		2	

Use o algoritmo de Dijkstra para determinar o precurso de menor custo entre as ilhas A e I.

3- Considere o seguinte grafo



com os pesos das arestas representados sobre estas. Use o algoritmo de Kruskal para determinar uma árvore geradora de peso mínimo. Represente a árvore obtida graficamente.

4- Dado um conjunto de n pontos no plano euclideano, $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$, seja $\mathcal{G}_P$ o conjunto do grafos planares conexos $G = (V, E)$ com $P \subseteq V$ e em que o conjunto de arestas E é formado por segmentos de recta. Para cada $G = (V, E) \in \mathcal{G}_P$ seja $l(G) = \sum_{e \in E} l(e)$ onde $l(e)$ é o comprimento da aresta $e = [v, u]$ na métrica euclideana (i.e. $l(e) = \|v - u\|_2$). Mostre que sendo $G \in \mathcal{G}_P$ um grafo que minimize $l(G)$ com um número mínimo de vértices então:

(a) G é uma árvore (chamada de *árvore de Steiner*);

(b) Se v é um vértice de G que não pertence a P então tem grau três e o ângulo entre cada par de arestas incidentes é 120°;

(c) O grau de um elemento de P é um, dois ou três. Se o grau for dois o ângulo entre as duas arestas incidentes é maior ou igual 120° e se o grau for três então o ângulo entre cada par de arestas incidentes é 120°;

(d) O conjunto dos vértices de G está contido em conv(P).