Resolução do 1º exame de 2010/2011

Programação Matemática

1-

$$\text{aff}(S) = \mathbb{R}^3$$

$$\text{conv}(S) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1; x+y+z \geq 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0\}$$

$$\text{cone}(S) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0\}$$

2- O problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar:} & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{Sujeito a:} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\ & x_1 - x_3 \leq 1 \\ & 2x_2 - x_3 \leq 2 \\ \text{Com:} & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

é equivalente, juntando variáveis de folga x_4, x_5 e x_6, ao problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar:} & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{Sujeito a:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ & x_1 - x_3 + x_5 = 1 \\ & 2x_2 - x_3 + x_6 = 2 \\ \text{Com:} & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Iniciando com $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (i.e. as variáveis básicas são as variáveis de folga), temos que o tableau $\begin{array}{|c|c|} \hline A & b \\ \hline c^T & 0 \\ \hline \end{array}$ fica da forma:

$$\begin{array}{|cccccc|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Neste caso já temos $\bar{c} = c$ e $A_B = I$ (i.e. as colunas de A correspondentes às variáveis básicas formam a matriz identidade e as correspondentes coordenadas de $\overline{c}$ são zero) portanto não é necessário proceder ao passo 0 do algoritmo simplex:

$$
\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\
(1) & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
2_{>0} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 6 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & (2) & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
0 & 2_{>0} & 3 & 0 & -2 & 0 & -2 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
$$

$$
\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
0 & 0 & (5/2) & 1 & -1 & -1/2 & 5 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 4_{>0} & 0 & -2 & -1 & -4 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|cccccc|c|}
\hline
0 & 0 & 1 & 2/5 & -2/5 & -1/5 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 & -1/5 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 1/5 & -1/5 & 2/5 & 2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -8/5 & -2/5 & -1/5 & -12 \\
\hline
\end{array}
$$

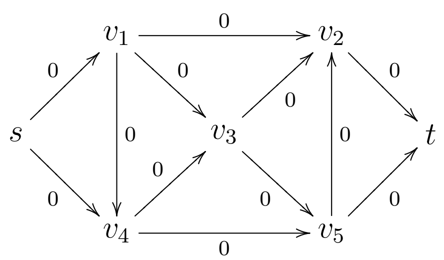
O termina no último tableau pois $\overline{c}^T = (0,0,0,-\frac{8}{5},-\frac{2}{5},-\frac{1}{5}) \leq 0$. Portanto a solução básica obtida é $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (3,2,2,0,0,0)$. Ou seja, no problema original, uma solução optimal é $(x_1,x_2,x_3) = (3,2,2)$ com valor optimal 12.

3- Usando o algoritmo de Dijkstra podemos construir a seguinte tabela:

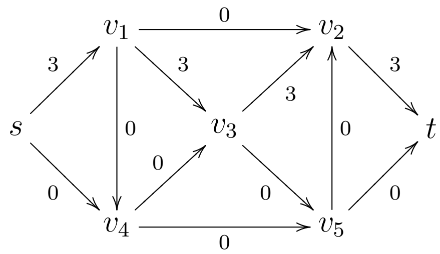
S	etiqueta	B	C	D	E	F	G
A	0	(1)	∞	∞	∞	(4)	3
B	$(1,A)$	X	$(1+2)$	∞	∞	∞	$(1+1)$
G	$(2,B)$	X	$2+2$	$(2+1)$	$2+5$	$2+4$	X
C	$(3,B)$	X	X	$3+1$	∞	∞	X
D	$(3,G)$	X	X	X	$(3+3)$	∞	X
F	$(4,A)$	X	X	X	8	X	X
E	$(6,D)$	X	X	X	X	X	X

Donde se tira que o custo mínimo de ligação entre A e E é de 6 euros e um caminho de custo mínimo é A-B-G-D-E.

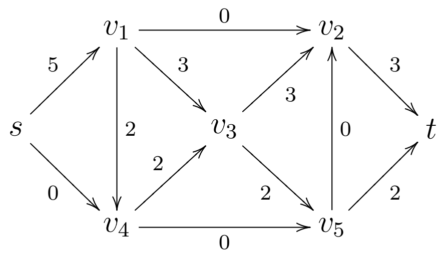
4- Iniciamos com o fluxo nulo:



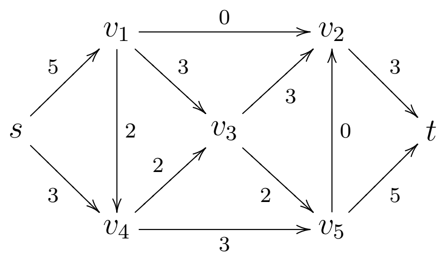
Determinamos o $S(x)$, que neste caso é formados por todos os vértices incluindo t. Logo existe um caminho x-aumentador, por exemplo s, v_1, v_3, v_2, t, com $\varepsilon = \min\{5, 3, 9, 3\} = 3$, ficamos então com o novo fluxo:



$S(x) = \{s, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, t\}$, tomamos novamente um caminho x-aumentador, por exemplo s, v_1, v_4, v_3, v_5, t, com $\varepsilon = \min\{5-3, 2, 6, 2, 6\} = 2$, ficamos então com o novo fluxo:



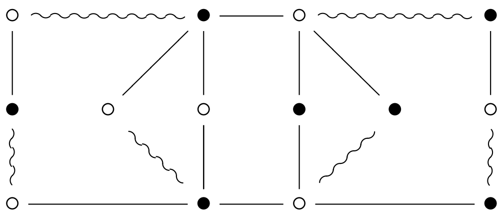
$S(x) = \{s, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, t\}$, tomamos novamente um caminho x-aumentador, por exemplo s, v_4, v_5, t, com $\varepsilon = \min\{9, 3, 6-2\} = 3$, ficamos então com o novo fluxo:



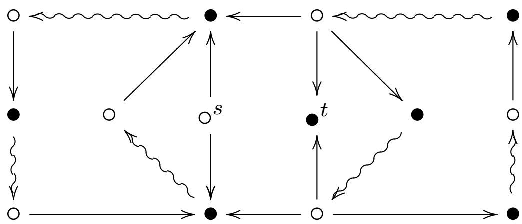
$S(x) = \{s, v_1, v_2, v_3, v_4\} \not\ni t$, logo este fluxo-$st$ é máximo, com valor $f(x) = 3 + 5 = 8$, e $C = \delta^+(S(x)) = \{(v_2, t), (v_3, v_5), (v_4, v_5)\}$ é corte-st de capacidade $d(C)$ mínima pois $d(C) = 3 + 2 + 3 = f(x)$.

5-

(a) Cosidere-se o seguinte candidato possível a matching de tamanho máximo:



Para verificar que este matching é de tamanho máximo basta ver que não existem caminhos de aumento de matching. Como o grafo é bipartido, tal equivale a não existir caminhos dirigidos entre dois vértices não cobertos pelo matching no seguinte digrafo:



onde as arestas são orientadas de $\bullet$ para $\circ$ se pertencem ao matching e de $\circ$ para $\bullet$ caso contrário.

É fácil ver que tal não pode existir pois teria que ser um caminho de s para t e tal teria que passar pelas duas arestas do meio no sentido oposto ao indicado.

Portanto o matching dado é um matching de tamanho máximo.

(b) O índice cromático do grafo, sendo o grafo bipartido, é, pelo teorema de Kőnig, igual ao seu grau máximo que é 4.

6- O número de 5-colorações possíveis para o grafo dado, C_4, é dado por $P_{C_4}(5)$ onde P_{C_4} é o polinómio cromático de C_4.

Usando a fórmula de recorrência para o polinómio cromático:

$$P_G = P_{G-e} - P_{G/e}$$

temos que

$$P_{C_4} = P_{P_4} - P_{K_3}$$

onde P_4 é o grafo-caminho com 4 vértices ($\bullet$ —— $\bullet$ —— $\bullet$ —— $\bullet$) e K_3 é o grafo completo com 3 vértices. $P_{P_4}(t) = t(t-1)^3$ pois colorindo da esquerda para a direita podemos escolher, sem mais restrições, t cores para o primeiro vértice e $t-1$ para os restantes. Por outro lado $P_{K_3}(t) = t(t-1)(t-2)$, logo $P_{C_4} = t(t-1)^3 - t(t-1)(t-2) = t(t-1)(t^2-3t+3)$.

Portanto o número de 5-colorações possíveis para C_4 é $P_{C_4}(5) = 5 \times 4 \times 13 = 260$.

7- Como por hipótese $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ é não-vazio temos que $\{c^T x : x \in P\}$ é também não-vazio (logo se for majorado tem supremo). Suponhamos que por absurdo $\{c^T x : Ax \leq b\}$ é majorado mas não tem máximo. Isso significa que o seu supremo, $s = \sup\{c^T x : Ax \leq b\}$, não pertence ao conjunto. Logo, o sistema linear $Ax \leq b; c^T x \geq s$ é inconsistente. Usando um corolário do lema de Farkas temos então que existem $y \geq 0$ e $\lambda \geq 0$ tal que $y^T A - \lambda c^T = 0$ e $y^T b - \lambda s < 0$.

λ não pode ser nulo pois nesse caso teriamos $y^T A = 0$ e $y^T b < 0$ o que implicaria, pelo mesmo resultado, que o poliedro P seria vazio. Mas se $\lambda > 0$ então existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para o qual $y^T b - \lambda(s-\varepsilon) < 0$ o que implica que o sistema $Ax \leq b; c^T x \geq s - \varepsilon$ é inconsistente. Neste caso teríamos que $s - \varepsilon \notin \{c^T x : x \in P\}$ o que contradiz a definição de supremo.