Resolução do problema 3 da 3ª Ficha de PM 2010/2011

3- [6 val.] Considere o problema de optimização:

$$(O) \quad \max\{\|x\|_\infty : Ax = b, x \geq 0\}$$

onde $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$.

Descreva um problema de programação linear do tipo

$$(P) \quad \max\{c^T\tilde{x} : \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}, \tilde{x} \geq 0\}$$

que resolva o problema (O) no sentido em que os valores optimais são iguais $(\nu(P) = \nu(O))$ e de uma solução optimal de (P) podemos extrair uma solução optimal de (O).

Resposta à questão 3:

Se, para o problema (O), $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, consideremos, para o problema (P), a matriz $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{mn+1,n^2+n}$ definida por blocos do seguinte modo:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & O & O & \cdots & O & -b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ O & A & O & \cdots & O & 0 & -b & 0 & \cdots & 0 \\ O & O & A & \cdots & O & 0 & 0 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & A & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b \\ 0^T & 0^T & 0^T & \cdots & 0^T & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

o vector $c \in \mathbb{R}^{n^2+n}$ definido em blocos por $c^T = (e_1^T, e_2^T, \ldots, e_n^T, 0^T)$ onde $e_1, e_2, \cdots, e_n$ formam a base canónica de $\mathbb{R}^n$ e $0 \in \mathbb{R}^n$ é o vector nulo, e $\tilde{b} = e_{mn+1} \in \mathbb{R}^{mn+1}$.

Vejamos que os valores optimais dos dois problemas coincidem.

Primeiro provemos que $\nu(O) \leq \nu(P)$:

Tomemos um qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$ e $x \geq 0$. Seja $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x_i = \|x\|_\infty$ e seja $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n^2+n}$ definido em blocos por

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \\ \lambda \end{bmatrix}$$

com $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, \lambda \in \mathbb{R}^n$ definidos por $\tilde{x}^j = x$ se $j = i$, $\tilde{x}^j = 0$ se $j \neq i$ e $\lambda = e_i$. É facil de ver que $\tilde{x} \geq 0$, $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ e $c^T\tilde{x} = e_i^T x = x_i = \|x\|_\infty$. Segue da arbitrariedade de x que $\nu(O) \leq \nu(P)$.

Vejamos agora a desigualdade inversa $(\nu(P) \leq \nu(O))$:

Podemos considerar o caso em que o problema (O) é limitado, pois o caso ilimitado $(\nu(O) = \infty)$ fica automaticamente demonstrado. Neste caso, temos que

$$Ax = 0, x \geq 0 \Rightarrow x = 0 \quad (*)$$

(pois senão, tomando $x_0 \geq 0$ tal que $Ax_0 = b$, teriamos $A(x_0 + tx) = b$, $x_0 + tx \geq 0$ para qualquer $t > 0$ e $\|x_0 + tx\|_\infty \to \infty$ quando $t \to \infty$).

Seja um qualquer $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n^2+n}$ tal que $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ e $\tilde{x} \geq 0$. Sendo

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}^1 \\ \vdots \\ \tilde{x}^n \\ \lambda \end{bmatrix}$$

com $\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, \lambda \in \mathbb{R}^n$, seja $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que

$$\frac{\tilde{x}_i^i}{\lambda_i} = \max\{\frac{\tilde{x}_j^j}{\lambda_j} : \lambda_j > 0\}$$

definimos então $x^* = \frac{\tilde{x}^i}{\lambda_i} \in \mathbb{R}^n$, temos que $x^* \geq 0$ e $Ax^* = b$ (pois $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \Rightarrow A\tilde{x}^i - b\lambda_i = 0 \Rightarrow Ax^* = b$).

Além disso,

$$\|x^*\|_\infty = \max\{\frac{\tilde{x}_j^i}{\lambda_i} : j = 1, \ldots, n\} \geq \frac{\tilde{x}_i^i}{\lambda_i} = \max\{\frac{\tilde{x}_j^j}{\lambda_j} : \lambda_j > 0\} \geq \sum_{\lambda_j > 0} \frac{\tilde{x}_j^j}{\lambda_j}\lambda_j = \sum_{\lambda_j > 0} \tilde{x}_j^j$$

Por outro lado, como $\lambda_j = 0$ e $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ implicam que $A\tilde{x}^j = 0$ e portanto $\tilde{x}^j = 0$ pela condição $(*)$, temos que

$$c^T\tilde{x} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j^j = \sum_{\lambda_j > 0} \tilde{x}_j^j$$

Temos portanto que $\|x^*\|_\infty \geq c^T\tilde{x}$. Logo da arbitrariadade de $\tilde{x}$ segue $\nu(O) \geq \nu(P)$. Além disso, se $\tilde{x}$ é optimal em (P) então x^* é optimal em (O) (pois $\nu(O) = \nu(P) = c^T\tilde{x} \leq \|x^*\|_\infty \leq \nu(O)$).