

# Apontamentos das aulas teóricas

## Programação Matemática

Rui Carpentier

1º Semestre de 2010/2011

### 1. NOTAÇÕES E PRELIMINARES

$\mathbb{R}$  designa o conjunto dos números reais.

$\mathbb{R}^n$  designa o espaço linear real canónico de dimensão  $n$ .

Um elemento  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  será visto como um vector coluna (i.e. uma matriz  $n \times 1$ ):

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^{m,n}$  designa o espaço das matrizes  $m \times n$ .

$A^T \in \mathbb{R}^{n,m}$  designa a transposta da matriz  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ .

Dados dois vectores  $x$  e  $y$  em  $\mathbb{R}^n$ ,  $x^T y$  designa o produto interno usual em  $\mathbb{R}^n$ .  $\|x\| := \sqrt{x^T x}$  define a normal euclideana do vector  $x$ .

Dado dois conjuntos  $A$  e  $B$  em  $\mathbb{R}^n$  define-se

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\} \text{ (soma de Minkowski);}$$

$$\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}.$$

Ao conjunto  $A + \{x\}$  (muitas vezes denotado  $A + x$ ) chama-se *conjunto  $A$  trasladado por  $x$* .

#### Propriedades:

Para quaisquer  $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  temos:

(i)  $A + B = B + A$ ;

(ii)  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ;

(iii)  $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ ;

(iv)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ .

Nota: Em geral  $(\lambda + \mu)A \neq \lambda A + \mu A$ .

#### Exercícios:

**Exercício 1.1.** Demonstre as propriedades anteriores e dê um exemplo de como, em geral,  $(\lambda + \mu)A \neq \lambda A + \mu A$ .

**Exercício 1.2.** Seja  $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ . Mostre que  $B + B = B - B = 2B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 2\}$ .

### 2. CONJUNTOS AFINS, CONVEXOS E CONES EM $\mathbb{R}^n$

#### Definições básicas.

**Definição 2.1.** Um conjunto  $S$  em  $\mathbb{R}^n$  diz-se:

um *conjunto afim* se  $x_1, x_2 \in S$  e  $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$ ;

um *conjunto convexo* se  $x_1, x_2 \in S$  e  $\lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$ ;

um *cone* se  $x \in S$  e  $\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in S$ ;

um *cone convexo* se  $x_1, x_2 \in S$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in S$ .

**Definição 2.2.** Uma combinação linear  $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$  de elementos  $x_1, \dots, x_m$  de  $\mathbb{R}^n$  diz-se:

uma *combinação afim* de  $x_1, \dots, x_m$  se  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ ;

uma *combinação convexa* de  $x_1, \dots, x_m$  se  $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$  e  $\lambda_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, m$ ;

uma *combinação cónica* de  $x_1, \dots, x_m$  se  $\lambda_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, m$ .

**Proposição 2.3.** Um conjunto é afim se e só se for fechado para combinações afins;  
Um conjunto é convexo se e só se for fechado para combinações convexas;  
Um conjunto é um cone convexo se e só se for fechado para combinações cónicas.

Dem. Exercício. □

O próximo resultado permite caracterizar os conjuntos afins em  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposição 2.4.** Seja  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto não-vazio.  $A$  é afim se e só se existem um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e um único subespaço linear  $L \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que  $A = L + x_0$ .

Dem. Exercício. □

Deste modo podemos definir a dimensão de um espaço afim da seguinte maneira.

**Definição 2.5.** Define-se a *dimensão* de um espaço afim  $A$  não-vazio como sendo a dimensão do único espaço linear  $L$  tal que  $A = L + x_0$  para algum  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 2.6.** (definição) Um *hiperplano* em  $\mathbb{R}^n$  é conjunto afim de dimensão  $n - 1$ . Uma recta é um conjunto afim de dimensão um.

O próximo resultado dá-nos outra caracterização dos conjuntos afins em  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposição 2.7.** Um conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  é afim se e só se existem uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  e um vector  $b \in \mathbb{R}^m$  tal que  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ .

Além disso, se  $X$  é não-vazio temos que a característica da matriz  $A$  é complementar à dimensão de  $X$ . Ou seja,  $\text{car } A + \dim X = n$ .

Dem. Deixamos como exercício verificar que um conjunto da forma  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$  (onde  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  é uma matriz e  $b \in \mathbb{R}^m$  é um vector) é um espaço afim.

Seja  $X$  um espaço afim. Pela proposição 2.4,  $X = L + x_0$  onde  $L$  é um subespaço linear de  $\mathbb{R}^n$  e  $x_0$  é um ponto de  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $L^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n : y^T x = 0, \forall x \in L\}$  o complemento ortogonal de  $L$ . Seja  $\{b_1, \dots, b_k\}$  uma base de  $L^\perp$ , então

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_k^T \end{bmatrix} x = 0 \right\} \quad (\text{pois } (L^\perp)^\perp = L).$$

Definindo

$$A = \begin{bmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_k^T \end{bmatrix}$$

temos que

$$x \in X \Leftrightarrow x - x_0 \in L \Leftrightarrow A(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow Ax = Ax_0$$

seja  $b = Ax_0$  então  $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ .

Observando que  $\text{car } A = \dim L^\perp$ , a identidade  $\text{car } A + \dim X = n$  resulta dos factos conhecidos de Álgebra Linear de que  $L \cap L^\perp = \{0\}$  e  $\mathbb{R}^n = L \oplus L^\perp$ . □

Note-se que no caso particular de um hiperplano este pode ser definido como um conjunto da forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\} \quad \text{para algum } a \in \mathbb{R}^n \text{ não-nulo e } b \in \mathbb{R}$$

**Exercícios:**

**Exercício 2.8.** Demonstre a proposição 2.3.

**Exercício 2.9.** Demonstre a proposição 2.4.

**Exercício 2.10.** Sejam  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto convexo e  $\lambda, \mu$  dois números reais positivos. Demonstre que

$$\lambda C + \mu C = (\lambda + \mu)C.$$

**Exercício 2.11.** Mostre que um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  é um subespaço linear de  $\mathbb{R}^n$  se e só se é simultaneamente um cone e um conjunto afim.

**Exercício 2.12.** Mostre que qualquer bola  $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$  é um conjunto convexo.

**Invólucros afins, convexos e cónicos.**

**Proposição 2.13.** Qualquer intersecção de uma família de  $\left\{ \begin{array}{l} \text{conjuntos afins} \\ \text{conj. convexos} \\ \text{cones convexos} \end{array} \right\}$  é um  $\left\{ \begin{array}{l} \text{conjunto afim} \\ \text{conj. convexo} \\ \text{cone convexo} \end{array} \right\}$ .

*Dem.* Exercício. □

**Definição 2.14.** Dado um conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , chama-se *invólucro*  $\left\{ \begin{array}{l} \text{afim} \\ \text{convexo} \\ \text{cónico} \end{array} \right\}$  ao menor  $\left\{ \begin{array}{l} \text{conjunto afim} \\ \text{conj. convexo} \\ \text{cone convexo} \end{array} \right\}$  que contém  $S$  e é denotado por  $\left\{ \begin{array}{l} \text{aff}(S) \\ \text{conv}(S) \\ \text{cone}(S) \end{array} \right\}$ .

A proposição 2.13 mostra que faz sentido falar em menor conjunto (afim, convexo, cone) que contém  $S$ . De facto, conduz à seguinte observação.

**Observação 2.15.**  $\left\{ \begin{array}{l} \text{aff}(S) \\ \text{conv}(S) \\ \text{cone}(S) \end{array} \right\}$  é igual à intersecção de todos os  $\left\{ \begin{array}{l} \text{conjuntos afins} \\ \text{conj. convexos} \\ \text{cones convexos} \end{array} \right\}$  que contém  $S$ .

O próximo resultado dá-nos uma caracterização dos invólucros afins, convexos ou cónicos.

**Proposição 2.16.** Seja  $S$  em conjunto em  $\mathbb{R}^n$  temos que:

$\text{aff}(S)$  é o conjunto de todas as combinações afins de elementos de  $S$ .

$\text{conv}(S)$  é o conjunto de todas as combinações convexas de elementos de  $S$ .

$\text{cone}(S)$  é o conjunto de todas as combinações cónicas de elementos de  $S$ .

*Dem.* Exercício. □

**Definição 2.17.** Define-se a *dimensão* de um conjunto  $S$  como sendo a dimensão do seu invólucro afim (i.e.  $\dim(S) := \dim(\text{aff}(S))$ ).

**Definição 2.18.** Um conjunto (finito) de pontos em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{x_1, \dots, x_m\}$ , diz-se *afimemente independente* se a sua dimensão for inferior em um à sua cardinalidade (i.e.  $\dim\{x_1, \dots, x_m\} = m - 1$ ).

A independência afim pode-se deduzir da independência dos pontos transladados como mostra o seguinte resultado.

**Proposição 2.19.** Um conjunto (finito) de pontos em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{x_1, \dots, x_m\}$  é afimemente independente se e só se  $\{x_2 - x_1, \dots, x_m - x_1\}$  é linearmente independente.

*Dem.* Exercício. □

Os próximos dois resultados dão-nos uma forma alternativa de construir conjuntos afins ou convexos.

**Proposição 2.20.** (1) Se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  são  $\left\{ \begin{array}{l} \text{conjuntos afins} \\ \text{conj. convexos} \\ \text{cones convexos} \end{array} \right\}$  então o conjunto  $A \times B \subseteq$

$\mathbb{R}^{n+m}$  é um  $\left\{ \begin{array}{l} \text{conjunto afim} \\ \text{conj. convexo} \\ \text{cone convexo} \end{array} \right\}$ .

(2) Qualquer transformação linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  transforma  $\left\{ \begin{array}{l} \text{conjuntos afins} \\ \text{conj. convexos} \\ \text{cones convexos} \end{array} \right\}$  em  $\left\{ \begin{array}{l} \text{conjuntos afins} \\ \text{conj. convexos} \\ \text{cones convexos} \end{array} \right\}$ .

(3) Qualquer transformação afim (i.e. a composta de uma transformação linear por um translação)  
 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  transforma  $\left\{ \begin{array}{l} \text{conjuntos afins} \\ \text{conj. convexos} \end{array} \right\}$  em  $\left\{ \begin{array}{l} \text{conjuntos afins} \\ \text{conj. convexos} \end{array} \right\}$ .

Dem. Exercício. □

**Corolário 2.21.** Se  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  são  $\left\{ \begin{array}{l} \text{conjuntos afins} \\ \text{conj. convexos} \\ \text{cones convexos} \end{array} \right\}$  então o conjunto  $\lambda_1 A + \lambda_2 B \subseteq \mathbb{R}^n$  é um  $\left\{ \begin{array}{l} \text{conjunto afim} \\ \text{conj. convexo} \\ \text{cone convexo} \end{array} \right\}$  para quaisquer  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

Dem. Basta ver que  $\lambda_1 A + \lambda_2 B$  é a imagem de  $A \times B$  pela transformação linear

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x; y) & \longmapsto & \lambda_1 x + \lambda_2 y \end{array}$$

□

**Definição 2.22.** Chama-se *polítopo* ao invólucro convexo de um número finito de pontos em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.23.** Chama-se *cone finitamente gerado* ao invólucro cónico de um número finito de pontos em  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 2.24.** (definição) Uma *semi-recta* em  $\mathbb{R}^n$  com extremo na origem é um cone gerado por único vector não-nulo.

A próxima definição é de certo modo o análogo do conceito de ortogonalidade para cones.

**Definição 2.25.** Para um cone convexo  $K$  em  $\mathbb{R}^n$  define-se o seu *cone polar*  $K^\circ$  como sendo o conjunto:

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : y^T x \leq 0, \forall x \in K\}.$$

**Proposição 2.26.** Para qualquer conjunto  $K$  (cone convexo ou não),  $K^\circ$  é um cone convexo e fechado. Se  $K$  é um subespaço linear de  $\mathbb{R}^n$  então  $K^\circ = K^\perp$ .

Dem. Como qualquer conjunto da forma  $\{y \in \mathbb{R}^n : y^T x \leq 0\}$  (um *semiespaço fechado*) é um conjunto fechado e convexo, e  $K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : y^T x \leq 0, \forall x \in K\}$  é uma intersecção de conjuntos deste tipo:

$$K^\circ = \bigcap_{x \in K} \{y \in \mathbb{R}^n : y^T x \leq 0\}$$

temos que  $K^\circ$  é um conjunto convexo e fechado.

Se  $K$  é um espaço linear então  $x \in K$  se e só se  $-x \in K$ . Portanto,

$$\begin{aligned} y \in K^\circ &\Leftrightarrow y^T x \leq 0, \forall x \in K \Leftrightarrow y^T x \leq 0 \wedge y^T(-x) \leq 0, \forall x \in K \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^T x \leq 0 \wedge y^T x \geq 0, \forall x \in K \Leftrightarrow y^T x = 0, \forall x \in K \Leftrightarrow y \in K^\perp \end{aligned}$$

□

Observemos que se um cone convexo  $K$  é invólucro cónico de um conjunto  $S$  então  $K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : y^T x \leq 0, \forall x \in S\}$ . Desta observação resulta a seguinte proposição.

**Proposição 2.27.** Se  $K$  é um cone finitamente gerado então o seu cone polar é o conjunto solução de um número finito de desigualdades:

$$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : c_i^T y \leq 0, \forall i=1, \dots, m\}.$$

**Exercícios:****Exercício 2.28.** Demonstre a proposição 2.13.**Exercício 2.29.** Demonstre a proposição 2.16.**Exercício 2.30.** Demonstre a proposição 2.19.**Exercício 2.31.** Demonstre a proposição 2.20.**Exercício 2.32.** Mostre que quaisquer três pontos distintos da esfera unitária  $n$ -dimensional,  $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ , são afimemente independentes.**Exercício 2.33.** Mostre que os pontos  $x_0, x_1, \dots, x_k$  distintos em  $\mathbb{R}^n$  são afimemente independentes se e só se:

$$\left( \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i = 0 \wedge \sum_{i=0}^k \lambda_i = 0 \right) \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

**Exercício 2.34.** Mostre que  $\text{cone}(S) = \{\lambda x : x \in \text{conv}(S) \wedge \lambda \geq 0\}$ .**Exercício 2.35.** Seja  $A$  um subconjunto da esfera unitária  $n$ -dimensional  $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$  e seja  $\text{conv}(A)$  o seu invólucro convexo. Mostre que  $\text{conv}(A) \cap \mathbb{S}^n = A$ .**Exercício 2.36.** Mostre que os pontos  $x_0, x_1, \dots, x_k$  de  $\mathbb{R}^n$  são afimemente independentes se e só se os pontos  $(x_0, 1), (x_1, 1), \dots, (x_k, 1)$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  são linearmente independentes**Teorema de Carathéodory.**

O próximo resultado, conhecido como **teorema de Carathéodory**, diz-nos que qualquer combinação convexa pode ser reduzida a uma combinação convexa de pontos afimemente independentes (e algo análogo para combinações cónicas).

**Teorema 2.37.** (1) *Seja  $C = \text{cone}(G)$  para algum  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  e seja  $x \in C$ . Então  $x$  pode ser escrito com uma combinação cónica de  $m \leq n$  vectores linearmente independentes de  $G$ .*  
 (2) *Seja  $C = \text{conv}(G)$  para algum  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  e seja  $x \in C$ . Então  $x$  pode ser escrito com uma combinação convexa de  $m \leq n + 1$  vectores afimemente independentes de  $G$ .*

*Dem.* (1) Se  $x \in \text{cone}(G)$  então  $x = \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j$ , com  $a_1, \dots, a_m \in G$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ .  
 Se os  $a_i$ 's são linearmente independentes então  $m \leq n$  e o resultado fica provado.  
 Se  $a_1, \dots, a_m$  são linearmente dependentes então existe  $(\mu_1, \dots, \mu_m) \neq (0, \dots, 0)$  tal que  $\sum_{j=1}^m \mu_j a_j = 0$ . Seja

$$\Delta^* = \max\{\Delta \geq 0 : \lambda_j - \Delta \mu_j \geq 0, \forall j=1, \dots, m\} = \min\left\{\frac{\lambda_j}{\mu_j} : \mu_j > 0, j = 1, \dots, m\right\}$$

(podemos assumir a existência de pelo menos um  $\mu_i > 0$  logo  $0 < \Delta^* < \infty$ ). Seja  $\lambda'_j := \lambda_j - \Delta^* \mu_j \geq 0$ , então  $x = \sum_{j=1}^m \lambda'_j a_j$  e existe um índice  $i$  tal que  $\lambda'_i = 0$ , logo podemos reduzir o número de  $a_j$ 's.

Aplicando este método recursivamente chega-se a subconjunto de  $\{a_1, \dots, a_m\}$  linearmente independente que gera  $x$ .

(2) Se  $x \in \text{conv}(G)$  então  $x = \sum_{j=1}^m \lambda_j a_j$ , com  $a_1, \dots, a_m \in G$ ,  $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ . Considerando o ponto  $(x, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$  temos que  $(x, 1) = \sum_{j=1}^m \lambda_j (a_j, 1)$ , com  $(a_1, 1), \dots, (a_m, 1) \in G \times \{1\}$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ . Ou seja,  $(x, 1) \in \text{cone}(G \times \{1\})$  logo, por (1), temos  $(x, 1) = \sum_{k=1}^{m'} \lambda'_{j_k} (a_{j_k}, 1)$ , com  $(a_{j_1}, 1), \dots, (a_{j_{m'}}, 1) \in G \times \{1\}$  linearmente independentes,  $\lambda'_{j_1}, \dots, \lambda'_{j_{m'}} > 0$  e  $m' \leq n + 1$ . Tal implica que  $x$  é uma combinação convexa de  $a_{j_1}, \dots, a_{j_{m'}}$  e estes são afimemente independentes. □

**Definição 2.38.** Um *simplex* é o invólucro convexo de um conjunto de vectores de  $\mathbb{R}^n$  afimemente independentes.

Um *simplex generalizado* é o invólucro cónico de um conjunto de vectores de  $\mathbb{R}^n$  linearmente independentes.

**Proposição 2.39.** (1) Qualquer polítopo é a união de um número finito de simplices.  
 (2) Qualquer cone finitamente gerado é a união de um número finito de simplices generalizados.

*Dem.* (1) Consideremos o polítopo  $P = \text{conv}(\{a_1, \dots, a_m\}) \subset \mathbb{R}^n$ . Definimos  $M = \{1, \dots, m\}$  e seja  $\mathcal{F}$  a família de todos subconjuntos  $J$  para os quais  $\{a_j\}_{j \in J}$  é afimemente independente. É óbvio que  $\mathcal{F}$  é finito. Para cada  $J \in \mathcal{F}$  seja  $P^J = \text{conv}(\{a_j : j \in J\})$  que, note-se, é um simplex.

Vejamus que  $P = \cup_{J \in \mathcal{F}} P^J$  (portanto  $P$  é uma união finita de simplices como queremos provar). A inclusão  $\supseteq$  resulta trivialmente do facto de  $P^J \subseteq P$  para qualquer  $J \in \mathcal{F}$ . E a inclusão recíproca resulta, como corolário, do teorema de Carathéodory 2.37.

(2) A demonstração da segunda parte da proposição é *mutatis mutandis* igual à da primeira.  $\square$

**Corolário 2.40.** Qualquer cone finitamente gerado é fechado e qualquer polítopo é compacto.

*Dem.* Pelo resultado anterior basta mostrar que qualquer simplex generalizado é fechado e qualquer simplex é compacto. O que é deixado como exercício.  $\square$

### Exercícios:

**Exercício 2.41.** Demonstre que qualquer simplex generalizado é fechado e qualquer simplex é compacto.

**Exercício 2.42.** Demonstre que o interior de um conjunto convexo é um conjunto convexo.

**Exercício 2.43.** Demonstre o fecho de um conjunto convexo é um conjunto convexo.

**Exercício 2.44.** Demonstre que se  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  é aberto então  $\text{conv}(S)$  é também um conjunto aberto.

**Exercício 2.45.** Demonstre que se  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  é um conjunto compacto então  $\text{conv}(S)$  é também um conjunto compacto.

**Exercício 2.46.** Seja  $C$  um subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que  $x \in \mathbb{R}^n$  é um ponto interior de  $C$  se e só se  $\text{cone}(C - x) = \mathbb{R}^n$  (onde  $C - x$  é o transladado de  $C$  por  $-x$ ).

**Exercício 2.47.** Seja  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto e  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Mostre que

$$\max\{a^T x : x \in \text{conv } K\} = \max\{a^T x : x \in K\}$$

**Exercício 2.48.** Seja  $x$  um ponto interior do invólucro convexo de um dado subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  (i.e.  $x \in \text{conv}(S) \subseteq \mathbb{R}^n$ ). Mostre que existem  $k$  pontos,  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , de  $S$  tais que  $x$  é ponto interior de  $\text{conv}(\{x_1, x_2, \dots, x_k\})$ .

### Separação de conjuntos convexos.

Vimos atrás que um hiperplano é um conjunto da forma  $H_=(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$ . Este divide o espaço  $\mathbb{R}^n$  em dois semi-espacos abertos  $H_<(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x < b\}$  e  $H_>(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x > b\}$ , sendo os seus respectivos fechados topológicos,  $H_{\leq}(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$  e  $H_{\geq}(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq b\}$ , designados de semi-espacos fechados.

O próximo resultado enuncia uma propriedade bastante importante dos conjuntos convexos fechados (separação de um ponto exterior ao conjunto por um hiperplano).

**Teorema 2.49.** Seja  $C$  um conjunto convexo fechado e não-vazio e seja  $p \notin C$ . Então existem  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $\varepsilon > 0$  tais que

$$a^T x \leq a^T p - \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Ou seja o hiperplano  $H_=(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = a^T p - \frac{\varepsilon}{2}\}$  separa  $C$  de  $p$ .

Além disso, existe um único ponto  $x_0 \in C$  tal que  $\|p - x_0\| = \text{dist}(C, p) := \inf\{\|x - p\| : x \in C\}$ .

*Dem.* A existência de um ponto  $x_0 \in C$  tal que  $\|p - x_0\| = \text{dist}(C, p)$  resulta do teorema de Weierstrass. De facto,  $\text{dist}(C, p) = \text{dist}(C', p)$  onde  $C' = \{x \in C : \|x - p\| \leq \|c - p\|\}$  para qualquer  $c \in C$  (existe pois  $C$  é não-vazio), e sendo  $C'$  é compacto e a função distância a  $p$ ,

$$d: C \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \|x - p\|, \text{ contínua temos existência do } x_0 \text{ resulta do teorema de Weierstrass.}$$

Seja  $x \in C$  e  $t \in ]0, 1[$ . Visto que  $C$  é convexo,  $(1-t)x_0 + tx \in C$  e portanto  $\|(1-t)x_0 + tx - p\| \geq \|x_0 - p\|$ . Elevando ao quadrado ambos os termos da desigualdade obtemos:

$$\begin{aligned} & \|(1-t)x_0 + tx - p\|^2 \geq \|x_0 - p\|^2 \\ \Leftrightarrow & ((1-t)x_0 + tx - p)^T((1-t)x_0 + tx - p) \geq \|x_0 - p\|^2 \\ \Leftrightarrow & (x_0 - p + t(x - x_0))^T(x_0 - p + t(x - x_0)) \geq \|x_0 - p\|^2 \\ \Leftrightarrow & \|x_0 - p\|^2 + 2t(x_0 - p)^T(x - x_0) + t^2\|x - x_0\|^2 \geq \|x_0 - p\|^2 \\ \Leftrightarrow & 2(x_0 - p)^T(x - x_0) + t\|x - x_0\|^2 \geq 0 \\ \Rightarrow & (x_0 - p)^T(x - x_0) \geq 0 \text{ fazendo } t \rightarrow 0^+ \\ \Leftrightarrow & (x_0 - p)^T x \geq (x_0 - p)^T(p + x_0 - p) \\ \Leftrightarrow & (x_0 - p)^T x \geq (x_0 - p)^T p + \|x_0 - p\|^2 \\ \Leftrightarrow & (p - x_0)^T x \leq (p - x_0)^T p - \|x_0 - p\|^2 \end{aligned}$$

Definindo  $a := p - x_0$  e  $\varepsilon := \|x_0 - p\|^2$ ,  $a \neq 0$  e  $\varepsilon > 0$  pois  $p \notin C$  (logo  $p \neq x_0$ ), temos a desigualdade enunciada no teorema.

A unicidade do ponto  $x_0$  deriva do facto de o interior do segmento de recta que une dois pontos situados na superfície de uma esfera estar contido no interior desta.  $\square$

O que este resultado basicamente diz é que para qualquer ponto exterior a um conjunto convexo existe um semi-espaço fechado contendo o conjunto convexo e excluindo o ponto em questão. Desta observação segue-se facilmente o seguinte corolário.

**Corolário 2.50.** *Qualquer conjunto convexo e fechado  $C$  é uma intersecção de semi-espaços fechados:*

$$C = \bigcap_{i \in I} H_{\leq}(a_i, b_i) \text{ com } H_{\leq}(a_i, b_i) := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq b_i\}.$$

*Dem.* Exercício.  $\square$

**Corolário 2.51.** *Seja  $C$  um cone convexo, fechado e não-vazio e seja  $p \notin C$ . Então existe  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $a^T x \leq 0 < a^T p$  para qualquer  $x \in C$ .*

*Dem.* Pelo teorema 2.49 sabemos que existem  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e  $\varepsilon > 0$  tais que

$$a^T x \leq a^T p - \varepsilon \quad \forall x \in C$$

logo, para qualquer  $\lambda > 0$ , temos

$$\lambda a^T x = a^T(\lambda x) \leq a^T p - \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Como  $a^T p - \varepsilon$  é constante e  $\lambda$  pode ser tão grande quanto se queira, esta última desigualdade só é válida se

$$a^T x \leq 0 \quad \forall x \in C$$

Além disso,  $a^T p > a^T x \quad \forall x \in C$  o que implica que  $a^T p > 0$  pois qualquer cone contém o vector nulo ( $0 \in C$ ).  $\square$

A próxima proposição resulta como corolário deste último resultado.

**Proposição 2.52.** *Seja  $K$  um cone convexo, então  $K^{oo} = \text{cl}(K)$  (i.e. o cone polar do cone polar de  $K$  é o seu fecho topológico de  $K$ ).*

*Dem.* É fácil ver que  $K \subseteq K^{oo}$  e como  $K^{oo}$  é fechado (pela proposição 2.26). basta então ver que  $K^{oo} \setminus \text{cl}(K) = \emptyset$ .

Suponhamos por absurdo que existe  $p \in K^{oo} \setminus \text{cl}(K)$ . Então, como  $p \notin \text{cl}(K)$ , temos, pelo corolário 2.51 (note-se que  $\text{cl}(K)$  é um cone convexo fechado), que existe  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $a^T x \leq 0 < a^T p$  para qualquer  $x \in \text{cl}(K)$  (em particular para qualquer  $x \in K$ ) o que implica que  $a \in K^o$ . Ora  $a \in K^o$  contradiz o facto de  $a^T p > 0$  e  $p \in K^{oo}$  ( $a \in K^o$  e  $p \in K^{oo} \Rightarrow a^T p \leq 0$ ).  $\square$

**Definição 2.53.** Sejam  $C_1$  e  $C_2$  conjuntos não-vazios, dizemos que um hiperplano  $H_=(a, b) := \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$ :

- (1) *separa fracamente*  $C_1$  e  $C_2$  se  $C_1 \subseteq H_{\leq}(a, b)$  e  $C_2 \subseteq H_{\geq}(a, b)$  (ou vice-versa);
- (2) *separa fortemente*  $C_1$  e  $C_2$  se separa fracamente  $C_1$  e  $C_2$  e  $\text{dist}(C_i, H_=(a, b)) > 0$  para  $i = 1, 2$ ;
- (3) *separa propriamente*  $C_1$  e  $C_2$  se separa fracamente  $C_1$  e  $C_2$  e  $C_1 \cup C_2 \not\subseteq H_=(a, b)$ .

**Observação 2.54.** Separação forte  $\Rightarrow$  separação própria  $\Rightarrow$  separação fraca.

O próximo resultado dá condições equivalentes à separação forte entre dois conjuntos convexos não-vazios.

**Proposição 2.55.** *Seja  $C_1$  e  $C_2$  dois conjuntos convexos não-vazios. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $C_1$  e  $C_2$  são separados fortemente por um hiperplano;
- (ii) Existe um vector não-nulo  $a \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\sup_{x \in C_1} a^T x < \inf_{y \in C_2} a^T y$ ;
- (iii)  $\text{dist}(C_1, C_2) := \inf\{\|x - y\| : x \in C_1 \text{ e } y \in C_2\} > 0$ .

*Dem.* Exercício. □

O teorema 2.49 é equivalente a dizer que um conjunto convexo  $C$  é separado fortemente de qualquer ponto exterior a  $C$ ,  $p \in \text{ext}(C)$ . Para pontos fronteiros não existe separação forte mas existe separação fraca como é enunciado em seguida.

**Proposição 2.56.** *Seja  $C$  um conjunto convexo e  $p \in \mathbb{R}^n$  um ponto fronteiro de  $C$  (i.e.  $p \in \text{front}C$ ). Então existe  $a \in \mathbb{R}^n$  não-nulo tal que  $a^T x \leq a^T p$  para todo o  $x \in C$ .*

*Dem.* Exercício (difícil). □

### Exercícios:

**Exercício 2.57.** Demonstre a corolário 2.50.

**Exercício 2.58.** Demonstre a proposição 2.55.

**Exercício 2.59.** Demonstre a proposição 2.56.

**Exercício 2.60.** Dê um exemplo de um par de conjuntos convexos fechados disjuntos mas não separados fortemente.

**Exercício 2.61.** Mostre que se dois conjuntos convexos são disjuntos então são separados propriamente.

**Exercício 2.62.** Dado um vector unitário  $v \in \mathbb{R}^n$  seja  $p_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \{v\}^\perp$  a projecção ortogonal sobre  $\{v\}^\perp$  (ou seja,  $p_v(x) = x - \langle v, x \rangle v$ ). Mostre que se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos convexos e fechados em  $\mathbb{R}^n$  tais que  $p_v(A) = p_v(B)$  para todo o vector unitário  $v \in \mathbb{R}^n$ , então  $A = B$ .

## 3. POLIEDROS, SISTEMAS LINEARES E PROGRAMAÇÃO LINEAR

### Sistemas lineares e poliedros.

**Definição 3.1.** Um *sistema linear* é um conjunto finito de desigualdades lineares e pode-se escrever da forma  $Ax \leq b$  onde  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ .

**Observação 3.2.** Uma equação linear pode ser decomposta em duas desigualdade ( $a^T x = \beta \Leftrightarrow a^T x \leq \beta$  e  $a^T x \geq \beta$ ). Deste modo, um conjunto finito de equações lineares é também um sistema linear.

**Definição 3.3.** Um sistema linear  $Ax \leq b$  diz-se *consistente* se o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  é não-vazio.

**Definição 3.4.** A um conjunto do tipo  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  (para um sistema linear  $Ax \leq b$ ) chama-se um *poliedro*.



**Proposição 3.5.** Um poliedro é um conjunto convexo fechado e é a intersecção de um número finito de semi-espacos fechados.

Dem. Exercício. □

**Definição 3.6.** Dois sistemas lineares  $Ax \leq b$  e  $A'x \leq b'$  dizem-se *equivalentes* se tiverem o mesmo conjunto de soluções:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x \leq b'\}$$

Por exemplo se o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  está contido num semi-espaco  $H_{\leq}(c, d) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x \leq d\}$  podemos juntar a desigualdade  $c^T x \leq d$  sem alterar o conjunto de soluções de  $Ax \leq b$ . Um caso particular em que isto acontece é quando temos  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \geq 0$  e tomamos  $c^T = y^T A$  e  $d = y^T b$ . Mais geralmente, dado um sistema  $Ax \leq b$  com  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ , se tivermos uma matriz  $M \in \mathbb{R}^{k,m}$  com entradas não negativas que possui uma inversa à esquerda  $M_{esq}^{-1} \in \mathbb{R}^{m,k}$  com entradas não negativas ( $M_{esq}^{-1} M = I$ ) então os sistemas  $Ax \leq b$  e  $MAx \leq Mb$  são equivalentes.

**Exercícios:**

**Exercício 3.7.** Demonstre a proposição 2.50.

**Exercício 3.8.** Mostre que uma intersecção finita de poliedros é um poliedro.

**Exercício 3.9.** Encontre um sistema linear com menos desigualdades equivalente ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y & \leq 1 \\ -x - y & \leq 1 \\ x - y & \leq 1 \\ -x + y & \leq 1 \\ -x & \leq 0 \end{cases}$$

**Exercício 3.10.** Mostre que pré-imagem de um poliedro por uma transformação afim é um poliedro.

**Alternativa de Fredholm e Lema de Farkas.**

Próximo resultado, conhecido como teorema da alternativa de Fredholm, dá-nos uma caracterização da consistência de sistemas de equações lineares.

**Teorema 3.11.** Seja  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  (com colunas  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ ) e  $b \in \mathbb{R}^m$ . O sistema  $Ax = b$  tem solução se e só se  $y^T b = 0$  para todo o  $y \in \mathbb{R}^m$  que satisfaça  $y^T a_1 = \dots = y^T a_n = 0$ .

Basicamente o que este resultado diz é que temos sempre uma e uma só de duas coisas: ou  $Ax = b$  tem solução  $x$  ou  $A^T y = 0$  tem solução  $y$  com  $y^T b \neq 0$ . Daí o nome **Alternativa de Fredholm**.

Outra forma de o escrever é

$$\exists_{x \in \mathbb{R}^n} : Ax = b \Leftrightarrow (y^T A = 0 \Rightarrow y^T b = 0)$$

Segue-se a demonstração do teorema.

Dem. Seja  $L := \{Ax \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\}$ , temos que

$$(y^T A = 0 \Rightarrow y^T b = 0) \Leftrightarrow (y \in L^\perp \Rightarrow y^T b = 0) \Leftrightarrow b \in (L^\perp)^\perp \Leftrightarrow b \in L \Leftrightarrow \exists_{x \in \mathbb{R}^n} : Ax = b$$

□

O próximo resultado, conhecido por **Lema de Farkas**, generaliza a alternativa de Fredholm para sistema de equações lineares restritas a soluções não-negativas.

**Lema 3.12.** Seja  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  (com colunas  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ ) e  $b \in \mathbb{R}^m$ . O sistema  $Ax = b, x \geq 0$  tem solução se e só se  $y^T b \geq 0$  para todo o  $y \in \mathbb{R}^m$  que satisfaça  $y^T A \geq 0$ .

*Dem.* Dizer que  $Ax = b$  tem solução  $x \geq 0$  é o mesmo que dizer que  $b \in K := \text{cone}(\{a_1, \dots, a_n\})$ . Como, pelo corolário 2.40,  $K$  é fechado temos, pela proposição 2.52, que  $K = K^{\circ\circ}$ . Portanto a existência de solução do sistema  $Ax = b, x \geq 0$  equivale a dizer que  $b \in K^{\circ\circ}$ , ou seja,  $b^T y \leq 0$  sempre que  $y \in K^{\circ}$ , que é como quem diz  $y^T b \leq 0$  para qualquer  $y \in \mathbb{R}^m$  que satisfaça  $y^T A \leq 0$ . Substituindo  $y$  pelo seu simétrico, chegamos á segunda condição do lema,  $y^T b \geq 0$  para todo o  $y \in \mathbb{R}^m$  que satisfaça  $y^T A \geq 0$ .  $\square$

Segue-se, como corolário, uma versão alternativa do lema Farkas.

**Corolário 3.13.** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . O sistema  $Ax \leq b$  tem solução se e só se  $y^T b \geq 0$  para todo o  $y \in \mathbb{R}^m$  que satisfaça  $y^T A = 0$  e  $y \geq 0$ .*

*Dem.* A existência de um  $x \in \mathbb{R}^n$  que satisfaça  $Ax \leq b$  é equivalente à existência de  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  e  $x_3 \in \mathbb{R}^m$  que satisfaçam  $Ax_1 - Ax_2 + x_3 = b$  com  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$  e  $x_3 \geq 0$ . Logo, o sistema  $Ax \leq b$  tem solução se e só se o sistema  $\tilde{A}\tilde{x} = b, \tilde{x} \geq 0$  tem solução (onde  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m,2n+m}$  é a matriz com três blocos  $\tilde{A} = [A | -A | I]$  e  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{2n+m}$  é o vector com três blocos  $\tilde{x} = [x_1^T | x_2^T | x_3^T]^T$ ). Este último sistema tem, pelo lema de Farkas (lema 3.12), solução se e só se  $y^T b \geq 0$  para todo o  $y \in \mathbb{R}^m$  que satisfaça  $y^T \tilde{A} \geq 0$ . Ora satisfazer  $y^T \tilde{A} \geq 0$  é equivalente a satisfazer as três condições  $y^T A \geq 0, -y^T A \geq 0$  e  $y \geq 0$ , o que é o mesmo que satisfazer  $y^T A = 0$  e  $y \geq 0$ .  $\square$

**Observação 3.14.** Se  $\ker A^T = \{0\}$  então  $Ax \leq b$  tem solução para qualquer  $b$ .

**Exercícios:**

**Exercício 3.15.** Considere os seguintes sistemas lineares:

$$(a) \begin{cases} x + y & \geq 0 \\ x - y & \leq 0 \\ x + y + z & \geq 3 \\ x + y + \alpha z & \leq \beta \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - y & \geq 1 \\ x + y & \leq 1 \\ \alpha x + y & \leq \beta \end{cases}$$

Determine, para cada um dos sistemas, os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  para os quais o sistema é inconsistente.

**Exercício 3.16.**

- (a) Seja  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  um poliedro e  $c \in \mathbb{R}^n$ . Mostre que se o conjunto  $\{c^T x : x \in P\}$  é majorado então tem máximo.  
 (b) Seja  $D = \{y \in \mathbb{R}^m : y^T A = c^T; y \geq 0\}$  um poliedro e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Mostre que se o conjunto  $\{y^T b : y \in D\}$  é minorado então tem mínimo.

**Exercício 3.17.** Seja  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  um poliedro não-vazio.

Mostre que  $P$  é limitado se e só se  $\text{cone}(\{a_i : i = 1, \dots, m\}) = \mathbb{R}^n$  onde  $\{a_i : i = 1, \dots, m\}$  é o conjunto dos vectores linha da matriz  $A$ .

**Problemas de programação linear e dualidade.**

**Definição 3.18.** Um *problema de programação linear* (ou *problema PL*) consiste em maximizar (ou minimizar) um funcional linear  $f(x)$  num dado poliedro  $P$ :

$$(P) \quad \max\{f(x) : x \in P\}.$$

Designamos o valor  $v(P) = \max\{f(x) : x \in P\}$  por *valor optimal* e a um ponto  $x^*$  tal que  $f(x^*) = v(P)$  chamamos de *solução optimal*.

Como vimos um poliedro é definido por um sistema linear  $Ax \leq b$ , e é sabido da álgebra linear que um funcional linear em  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , é representado por um vector  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = c^T x$ . Assim podemos apresentar um problema de programação linear do seguinte modo:

$$(P) \quad \max\{c^T x : Ax \leq b\} \text{ com } c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m,n} \text{ e } b \in \mathbb{R}^m$$

designando este por *problema primal* e chamamos *problema dual* ao problema PL:

$$(D) \quad \min\{y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0\}$$

Estes dois problemas estão relacionados pelo simples facto de os seus valores optimais (quando existem) serem iguais. É isso que diz o seguinte resultado conhecido por **teorema da dualidade**.

**Teorema 3.19.** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $c \in \mathbb{R}^n$ . Assumindo que cada um dos dois sistemas  $(Ax \leq b)$  e  $(y^T A = c^T, y \geq 0)$  é consistente, temos que*

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\} = \min\{y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0\}.$$

*Dem.* Pelo exercício 3.16 sabemos que se os conjuntos  $\{c^T x : Ax \leq b\}$  e  $\{y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0\}$  têm supremo e ínfimo respectivamente então têm máximo e mínimo respectivamente.

Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Ax \leq b$  e  $y \in \mathbb{R}^m$  tal que  $y^T A = c^T, y \geq 0$ . Então  $c^T x = y^T Ax \leq y^T b$ . Logo se os sistemas  $Ax \leq b$  e  $y^T A = c^T, y \geq 0$  são consistentes temos

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\} \leq \min\{y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0\}.$$

Esta desigualdade é conhecida por *dualidade fraca*.

Vejam agora a desigualdade contrária. Seja  $v = \max\{c^T x : Ax \leq b\}$  então o sistema  $Ax \leq b, c^T x \geq l$  não é consistente para qualquer  $l > v$ . Colocando este último sistema na forma

$$\begin{bmatrix} A \\ -c^T \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ -l \end{bmatrix}$$

podemos usar o corolário 3.13 para concluir que existem  $y \in \mathbb{R}^m$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  com  $y \geq 0$  e  $\lambda \geq 0$  tais que  $y^T A = \lambda c^T$  e  $y^T b < \lambda l$ . Não podemos ter  $\lambda = 0$  pois nesse caso teríamos  $y^T A = 0$  e  $y^T b < 0$ , mas  $y^T A = 0, y \geq 0$  e  $b \geq Ax$  implicam  $y^T b \geq y^T Ax = 0$  o que contradiz  $y^T b < 0$ . Logo  $\lambda > 0$  e tomando  $\tilde{y} := \lambda^{-1} y$  temos  $\tilde{y} \geq 0, \tilde{y}^T A = c^T$  e  $\tilde{y}^T b < l$  pelo que  $\min\{y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0\} < l$  para qualquer  $l > v$ . Logo

$$\min\{y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0\} \leq \max\{c^T x : Ax \leq b\}.$$

□

A segunda desigualdade pode ser vista com alguma intuição geométrica de seguinte modo. Seja  $x_0$  uma solução optimal do sistema  $Ax \leq b$  e seja  $I := \{1 \leq i \leq m : a_i^T x_0 = b_i\}$  onde  $a_i^T$  são as linhas da matriz  $A$ . Intuitivamente vê-se que se  $x_0$  é solução optimal então  $c \in \text{cone}(\{a_i : i \in I\})$ . Portanto

$$c = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \text{ com } \lambda_i \geq 0.$$

Tomando  $y \in \mathbb{R}^m$  tal que  $y_i = \lambda_i$  se  $i \in I$  e  $y_i = 0$  se  $i \notin I$  temos que  $y \geq 0, y^T A = c^T$  e

$$y^T b = \sum_{i \in I} y_i b_i = \sum_{i \in I} y_i a_i^T x_0 = y^T A x_0 = c^T x_0.$$

Logo

$$\min\{y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0\} \leq c^T x_0 = \max\{c^T x : Ax \leq b\}.$$

Note-se que isto não é uma demonstração pois ficou por demonstrar que se  $x_0$  é solução optimal então  $c \in \text{cone}(\{a_i : i \in I\})$ .

As condições do teorema anterior podem ser enfraquecidas ligeiramente de modo a obter um resultado mais geral.

**Teorema 3.20.** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $c \in \mathbb{R}^n$ . Consideremos os problemas PL duais (P)  $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$  e (D)  $\min\{y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0\}$ . Se um dos dois problemas (P) e (D) é viável (i.e. o sistema linear associado é consistente), então*

$$\sup\{c^T x : Ax \leq b\} = \inf\{y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0\}.$$

*Dem.* Exercício. □

**Exercícios:**

**Exercício 3.21.** Demonstre o teorema 3.20.

**Exercício 3.22.** Seja  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $c \in \mathbb{R}^n$ . Assumindo que os sistemas  $Ax = b, x \geq 0$  e  $y^T A \geq c^T$  são consistentes, mostre que

$$\max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\} = \min\{y^T b : y^T A \geq c^T\}.$$

**Exercício 3.23.** Use o teorema da dualidade para determinar o valor optimal para cada um dos seguintes problemas de programação linear:

- (a)  $\max\{-x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 : x_1 + x_2 + x_3 \leq 2, -x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 0, x_2 + x_3 + x_4 \leq 3\}$ ;  
 (b)  $\max\{2x_1 + x_3 : x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \leq 2, x_1 - x_2 + x_3 \leq 3, x_1 + x_3 \leq 4\}$ .

**Pontos interiores e equações implícitas.**

**Definição 3.24.** Uma desigualdade  $a_i^T x \leq b_i$  dentro de um sistema linear  $Ax \leq b$  diz-se *igualdade implícita* se qualquer solução  $x$  de  $Ax \leq b$  satisfaz  $a_i^T x = b_i$ .

**Exemplo 3.25.** O ponto  $(x, y) = (0, 0)$  é a única solução do sistema

$$\begin{cases} x + y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

portanto cada uma das desigualdades do sistema é uma igualdade implícita.

**Definição 3.26.** Dado um sistema linear  $Ax \leq b$  designamos por  $A^-x \leq b^-$  o subsistema formado pelas igualdades implícitas e por  $A^+x \leq b^+$  o subsistema formado pelas restantes desigualdades.

**Observação 3.27.** Os sistemas  $Ax \leq b$  e  $A^-x = b^-, A^+x \leq b^+$  são equivalentes.

**Definição 3.28.** Um dado ponto  $x_0$  diz-se *ponto interno* de um poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  se  $x_0$  satisfaz  $A^-x_0 = b^-$  e  $A^+x_0 < b^+$  (o que é equivalente dizer que  $x_0 \in P$  e  $A^+x_0 < b^+$ ).

**Observação 3.29.** Note-se que se o sistema  $A^+x < b^+$  for vazio (i.e.  $A^- = A$ ) qualquer ponto de  $P$  é um ponto interno.

**Lema 3.30.** Se um poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  é não-vazio então tem pelo menos um ponto interno.

*Demonstração.* Seja  $I^+$  o conjunto dos índices das desigualdades do subsistema  $A^+x \leq b^+$ , ou seja

$$I^+ := \{i : \exists x \in P a_i^T x < b_i\}.$$

Logo, pela definição de  $I^+$ , para qualquer índice  $i \in I^+$  existe pelo menos um ponto  $x^i \in P$  tal que  $a_i^T x^i < b_i$ . Assim sendo, podemos construir o ponto

$$x_0 = \frac{1}{|I^+|} \sum_{i \in I^+} x^i$$

que é fácil ver que se trata de um ponto interno de  $P$ . □

**Proposição 3.31.** Seja  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  um poliedro não-vazio, então

$$\text{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : A^-x = b^-\} = \{x \in \mathbb{R}^n : A^-x \leq b^-\}$$

e

$$\dim(P) = n - \text{car}(A^-).$$

*Dem.* Seja  $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : A^-x = b^-\}$  e  $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : A^-x \leq b^-\}$ . Como  $Ax \leq b \Rightarrow A^-x = b^- \Rightarrow A^-x \leq b^-$  temos  $P \subseteq A_1 \subseteq A_2$ . Ora sendo  $A_1$  um conjunto afim que contém  $P$  temos que  $\text{aff}(P) \subseteq A_1$ .

Vejam agora que  $A_2 \subseteq \text{aff}(P)$ . Pelo lema anterior, existe um ponto interno  $x_0$  de  $P$ , tal ponto satisfaz, por definição,  $A^+x_0 < b^+$  e  $A^-x_0 = b^-$ . Seja  $x \in A_2$ , se  $x = x_0$  então  $x \in P \subseteq \text{aff}(P)$ . Se  $x \neq x_0$  então existe  $\lambda > 0$  suficientemente pequeno de modo a que o ponto  $z := \lambda x + (1 - \lambda)x_0$

esteja contido em  $P$  (a condição  $A^-z \leq b^-$  é satisfeita pois ambos  $x$  e  $x_0$  estão em  $A_2$  e a condição  $A^+z \leq b^+$  é satisfeita para  $\lambda > 0$  suficientemente pequeno). Deste modo temos que  $x = \lambda^{-1}z + (1 - \lambda^{-1})x_0$  é uma combinação afim de dois pontos de  $P$ , logo  $x \in \text{aff}(P)$ .

$\dim(P) = \dim A_1 = n - \text{car}(A^-)$  (pela proposição 2.7).  $\square$

### Exercícios:

**Exercício 3.32.** Seja  $Ax \leq b$  um sistema linear que possui uma só igualdade implícita  $a^T x \leq b$ . Determine essa desigualdade.

**Exercício 3.33.** Mostre que  $x \in \mathbb{R}^n$  é um ponto interno do poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  se e só se existe uma bola centrada em  $x$  de raio  $\varepsilon$ ,  $B_\varepsilon(x)$ , tal que  $B_\varepsilon(x) \cap \text{aff}(P) \subseteq P$ .

### Poliedros pontuados e vértices.

**Definição 3.34.** O *espaço linearizado* de um poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  é o conjunto  $\text{lin. space}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ .

**Observação 3.35.**  $y \in \text{lin. space}(P)$  se e só se  $\{x + \lambda y : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq P$  para todo o  $x \in P$ .

**Observação 3.36.**  $x + \text{lin. space}(P) \subseteq P$  para todo o  $x \in P$ .

**Definição 3.37.** Um poliedro  $P$  diz-se *pontuado* se  $\text{lin. space}(P) = \{0\}$ .

**Observação 3.38.** Um poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  é pontuado se e só se  $\text{car}(A) = n$ .

**Observação 3.39.** Se um poliedro  $P$  é limitado então  $P$  é pontuado. No entanto um poliedro pontuado não é necessariamente limitado.

Para poliedros pontuados podemos definir o conceito de vértice do seguinte modo.

**Definição 3.40.** Um ponto  $x_0$  de um poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  pontuado diz-se um *vértice* se for a única solução de  $n$  equações linearmente independentes do sistema  $Ax \leq b$ .

**Exemplo 3.41.** Os vértices (no sentido da definição anterior) do poliedro  $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 2, y \leq 2, x + y \geq 1\}$  correspondem aos vértices (no conceito usual da geometria elementar) do triângulo  $P$ .

**Definição 3.42.** Um ponto  $x_0$  de um conjunto convexo  $C$  diz-se *ponto extremo* de  $C$  se não existirem pontos distintos  $x_1$  e  $x_2$  de  $C$  tais que  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ .

Note-se que isto é equivalente a dizer que  $x_0$  não pertence ao interior de qualquer segmento de recta contido em  $C$ .

Este último conceito é, como mostra o seguinte resultado, um generalização do conceito de vértice para conjuntos convexos não necessariamente poliedros.

**Proposição 3.43.** Um ponto  $x_0$  de um poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  pontuado é um vértice se e só se é um ponto extremo de  $P$ .

*Dem.* Seja  $x_0$  um vértice de  $P$ , então existe uma submatriz  $A' \in \mathbb{R}^{n,n}$  de  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  com linhas linearmente independentes tal que  $x_0$  é a única solução do sistema  $A'x = b'$  onde  $b' \in \mathbb{R}^n$  é o correspondente subvector de  $b \in \mathbb{R}^m$ . Sejam  $x_1$  e  $x_2$  dois quaisquer pontos de  $P$  que satisfaçam  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ . Como  $x_1, x_2 \in P$  temos

$$\begin{cases} A'x_1 \leq b' \\ A'x_2 \leq b' \end{cases}$$

e por outro lado

$$\begin{cases} A'x_1 = A'(2x - x_2) = 2b' - A'x_2 \geq 2b' - b' = b' \\ A'x_2 = A'(2x - x_1) = 2b' - A'x_1 \geq 2b' - b' = b' \end{cases}$$

logo  $A'x_1 = A'x_2 = b'$  o que implica  $x_1 = x_2$ .

Vejamus que se  $x_0$  não for vértice então também não será ponto extremo. Se  $x_0$  não é vértice então o maior subsistema  $A'x \leq b'$  de  $Ax \leq b$  tal que  $A'x_0 = b'$  é tal que a característica de  $A'$  não é total ( $\text{car}(A') < n$ ). Logo existe  $z \in \mathbb{R}^n$  não-nulo tal que  $A'z = 0$ . Como  $a_i^T x_0 < b_i$

para qualquer desigualdade que não esteja no subsistema  $A'x \leq b'$ , temos que, para um  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno,  $x_0 + \varepsilon z$  e  $x_0 - \varepsilon z$  pertencem a  $P$ , o que implica que  $x_0$  não é um ponto extremo.  $\square$

**Definição 3.44.** Uma semi-recta (ou raio)  $R(x; r) = \{x + \lambda r : \lambda \geq 0\} = x + \text{cone}(\{r\})$  (com  $x, r \in \mathbb{R}^n$  e  $r \neq 0$ ) contida num conjunto convexo  $C$  diz-se *semi-recta extrema*<sup>1</sup> de  $C$  se para qualquer ponto  $x_0 \in R(x, r)$  a condição  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$  com  $x_1, x_2 \in C$  implica que  $x_1, x_2 \in R(x, r)$  (note-se que esta condição implica que  $x$  é ponto extremo de  $C$ ). Ao vector  $r$  de uma semi-recta  $R(x, r)$  chamamos a *direcção* da semi-recta  $R(x, r)$ .

**Observação 3.45.** Se  $x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  então  $R(x; r) = \{x + \lambda r : \lambda \geq 0\} = x + \text{cone}(\{r\})$  é uma semi-recta contida no poliedro  $P$  se e só se  $Ar \leq 0$ .

**Proposição 3.46.** Considere um poliedro pontuado  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  e seja  $r \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Então  $r$  é direcção de uma semi-recta extrema se e só se existe um subsistema  $A'x = 0$  do sistema  $Ax = 0$  consistido em  $n - 1$  equações linearmente independentes tal que  $A'r = 0$  e  $Ar \leq 0$ .

*Dem.* Exercício.  $\square$

**Corolário 3.47.** Qualquer poliedro pontuado possui um número finito de vértices e semi-rectas extremas.

*Dem.* Exercício.  $\square$

De facto temos que, se  $P$  for um poliedro pontuado definido pelo sistema  $Ax \leq b$  onde  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ , o número de vértices de  $P$  não poderá exceder  $\binom{m}{n}$  e o número de semi-rectas extremas de  $P$  não poderá exceder  $\binom{m}{n-1}$ .

A existência de vértices para poliedros pontuados é garantida pelo seguinte resultado.

**Lema 3.48.** Qualquer poliedro pontuado não-vazio possui pelo menos um vértice.

*Dem.* Dado um ponto  $y$  num poliedro pontuado não-vazio  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  podemos decompor o sistema  $Ax \leq b$  nos subsistemas  $A'_y x \leq b'_y$  e  $A''_y x \leq b''_y$  que satisfazem  $A'_y y = b'_y$  e  $A''_y y < b''_y$ .

Seja  $x_0$  um ponto de  $P$  tal que  $A'_{x_0}$  tenha característica máxima. Se  $\text{car } A'_{x_0} = n$  então  $x_0$  é um vértice e não temos mais nada a provar. Senão existe pelo menos um vector não-nulo tal que  $A'_{x_0} v = 0$ , logo  $A'_{x_0}(x_0 + \lambda v) = b'_{x_0}$  para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Seja  $B_1 = \{\lambda \in \mathbb{R} : A''_{x_0}(x_0 + \lambda v) < b''_{x_0}\}$  e  $B_2 = \{\lambda \in \mathbb{R} : x_0 + \lambda v \notin P\}$ .  $B_1$  e  $B_2$  são abertos de  $\mathbb{R}$ , disjuntos entre si e não-vazios ( $0 \in B_1$  e se  $B_2$  fosse vazio então  $P$  não seria pontuado). Portanto existe  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $x_0 + \lambda_0 v \in P$  e  $A''_{x_0}(x_0 + \lambda v) \not< b''_{x_0}$  ou seja existe pelo menos uma desigualdade de  $A''_{x_0} x \leq b''_{x_0}$  que é uma igualdade para  $x = x_0 + \lambda_0 v$ . Logo  $\text{car } A'_{x_0 + \lambda_0 v} > \text{car } A'_{x_0}$  (pois  $A'_{x_0}$  é submatriz de  $A'_{x_0 + \lambda_0 v}$  e  $A'_{x_0} v = 0$  enquanto  $A'_{x_0 + \lambda_0 v} v \neq 0$ ) o que contradiz a definição de  $x_0$ .  $\square$

**Proposição 3.49.** Seja  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  um poliedro não-vazio e pontuado, e consideremos o problema PL

$$\max\{c^T x : x \in P\}$$

(i) Se  $v(P) = \max\{c^T x : x \in P\}$  é finito, então existe um vértice  $x_0$  que é solução optimal ( $c^T x_0 = v(P)$ );

(ii) Se  $v(P) = +\infty$ , então existe uma semi-recta extrema  $R(x, r) = x + \text{cone}(\{r\})$  de  $P$  com  $c^T r > 0$  (logo  $c^T(x + \lambda r) \rightarrow +\infty$  quando  $\lambda \rightarrow +\infty$ ).

*Dem.* (i) Consideremos o conjunto

$$F = \{x \in P : c^T x = v(P)\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} A \\ c^T \\ -c^T \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ v(P) \\ -v(P) \end{bmatrix} \right\}$$

<sup>1</sup>Esta definição é diferente da dada no texto de Geir Dahl que é um bocado ambígua (está mais próxima da definição de direcção extrema).

É claro que  $F$  é um poliedro pontuado (pois  $P$  também o é) e não-vazio (se  $P$  é fechado e  $v(P) < \infty$  então existe  $x_0 \in P$  tal que  $c^T x_0 = v(P)$ ). Então, pelo lema 3.48,  $F$  tem vértices.

Seja  $x_0$  um vértice de  $F$ , vejamos que também é um vértice de  $P$ . Pela proposição 3.43 tal é equivalente a mostrar que  $x_0$  é ponto extremo de  $P$ . Sejam  $x_1, x_2 \in P$  tais que  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$  temos então que

$$v(P) = c^T x_0 = \frac{c^T x_1 + c^T x_2}{2} \leq \frac{v(P) + v(P)}{2} = v(P)$$

logo  $x_1, x_2 \in F$  e sendo  $x_0$  um ponto extremo de  $F$  (pois é um vértice de  $F$ ) temos que  $x_1 = x_2 = x_0$ . Ou seja,  $x_0$  é um ponto extremo (logo vértice) de  $P$ .

(ii) Se  $v(P) = +\infty$  então, pelo teorema 3.20, o poliedro dual  $D = \{y \in \mathbb{R}^m : y^T A = c^T, y \geq 0\}$  é vazio. Assim, pelo lema de Farkas (lema 3.12), existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Ax \geq 0$  e  $c^T x < 0$ . Ora tomando  $r_0 = -x$  temos que, para qualquer  $p \in P$  a semi-recta  $R(p, r_0)$  está contida em  $P$  e  $c^T r_0 > 0$ . Falta agora encontrar uma semi-recta como esta mas que seja extrema.

Consideremos o problema PL

$$(Q) \quad \max\{c^T z : Az \leq 0, c^T z \leq 1\}.$$

Este problema é viável ( $\lambda r_0$  é solução para  $\lambda > 0$  suficientemente pequeno) e é limitado ( $\max\{c^T z : Az \leq 0, c^T z \leq 1\} \leq 1 < \infty$ ). Deste modo, pela alínea (i) da proposição, o problema possui uma solução optimal  $r$  que é um vértice de  $Q$ . É fácil ver que tomando um vértice  $x_0$  de  $P$  a semi-recta  $R(x_0, r)$  é extrema e  $c^T r > 0$  (de facto  $c^T r = 1$ ).  $\square$

Este resultado mostra que a resolução de um problema PL reduz-se a um problema finito, basta verificar se existe uma semi-recta extrema  $R(x, r)$  com  $c^T r > 0$  (caso em que o problema não tem solução) e, caso não exista, determinar entre os vértices qual o que tem maior valor  $c^T x$ . No entanto este procedimento torna-se em geral pouco eficiente há medida que a dimensão do problema cresce.

### Exercícios:

**Exercício 3.50.** Demonstre a observação 3.45.

**Exercício 3.51.** Demonstre a proposição 3.46. Sugestão: Mostre que se  $A'r = 0$  e  $Ar \leq 0$  então  $R(x, r)$  é semi-recta extrema se  $x$  é vértice de  $P$  e  $A'x = b'$ .

**Exercício 3.52.** Demonstre o corolário 3.47.

**Exercício 3.53.** Mostre que se para um dado ponto  $x$  de um poliedro  $P$  a semi-recta  $R(x, r) = \{x + \lambda r \in \mathbb{R}^n : \lambda \in [0, +\infty[ \}$  está contida em  $P$  então a semi-recta  $R(y, r)$  está contida em  $P$  para qualquer  $y \in P$ .

**Exercício 3.54.** Seja  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  o poliedro que é conjunto de soluções do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + 2z \geq 0 \\ x - y \geq 2 \\ y - z \geq 4 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

(a) Determine o conjunto dos vértices  $V$  do poliedro  $P$  assim como o seu conjunto de semi-rectas extremas.

(b) Resolva o problema de programação linear  $\min\{x + y + z : (x, y, z) \in P\}$ .

### Decomposições de poliedros.

Outra consequência da proposição 3.49 é que qualquer poliedro pontuado não-vazio pode ser decomposto do modo que é enunciado a seguir.

**Teorema 3.55.** *Seja  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  um poliedro pontuado não-vazio com conjunto de vértices  $V$ . Seja  $R$  um conjunto formado por um vector de direcção para cada semi-recta extrema de  $P$ . Então  $P$  pode ser decomposto do seguinte modo*

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(R).$$

*Dem.* Seja  $Q = \text{conv}(V) + \text{cone}(R)$ . Se  $x \in Q$  então  $x = x_1 + x_2$  com  $x_1 \in \text{conv}(V)$  e  $x_2 \in \text{cone}(R)$ . Como  $V \subseteq P$  e  $P$  é convexo temos  $\text{conv}(V) \subseteq P$ , logo  $Ax_1 \leq b$ . Por outro lado, para qualquer  $r$  que seja vector de direcção de uma semi-recta extrema de  $P$ , temos, pela observação 3.45,  $Ar \leq 0$ . Logo se  $x_2$  é uma combinação cónica de elementos de  $R$  também irá satisfazer a condição  $Ax_2 \leq 0$ . Deste modo,  $Ax = Ax_1 + Ax_2 \leq b$  (i.e.  $x \in P$ ), portanto  $Q \subseteq P$ .

Vejam agora que se  $x \notin Q$  então  $x \notin P$ . Seja  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  e  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_l\}$ . Se  $x_0 \notin Q$ , então o sistema

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k & r_1 & r_2 & \dots & r_l \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \dots, \mu_l \geq 0$$

não tem solução. Então, pelo lema de Farkas 3.12, existem  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $d \in \mathbb{R}$  tais que

$$[y_0^T d] \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k & r_1 & r_2 & \dots & r_l \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ e } [y_0^T d] \begin{bmatrix} x_0 \\ 1 \end{bmatrix} < 0.$$

Ou seja,  $y_0^T v_i \geq -d$  para todo o  $1 \leq i \leq k$ ,  $y_0^T r_j \geq 0$  para todo o  $1 \leq j \leq l$  e  $y_0^T x_0 < -d$ . Tomando  $c = -y_0$  temos  $c^T v_i \leq d$  para todo o  $1 \leq i \leq k$ ,  $c^T r_j \leq 0$  para todo o  $1 \leq j \leq l$  e  $c^T x_0 > d$ . Ora  $c^T r_j \leq 0$  para todo o  $1 \leq j \leq l$  implica, pela proposição 3.49 (ii), que o problema  $\max\{c^T x : x \in P\}$  é limitado ( $\max\{c^T x : x \in P\} < \infty$ ). E pela alínea (i) da mesma proposição temos  $\max\{c^T x : x \in P\} = \max\{c^T v_1, \dots, c^T v_k\} \leq d$ . Como  $c^T x_0 > d$  temos que  $x_0 \notin P$ .  $\square$

**Lema 3.56.** *Seja  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  um poliedro não-vazio. Então  $P$  pode ser decomposto como  $P = Q + L$  onde  $L = \text{lin. space}(P)$  e  $Q = P \cap L^\perp$  é um poliedro pontuado.*

*Dem.* Seja  $x \in P$  e  $x = x_1 + x_2$  a sua decomposição ortogonal em  $L$  (i.e.  $x_1 \in L$  e  $x_2 \in L^\perp$ ), então  $Ax_2 = Ax \leq b$  logo  $x_2 \in P \cap L^\perp$ . Logo  $x \in L + Q$ .

Por outro lado, se  $x \in L + Q$  ( $x = x_1 + x_2$  com  $x_1 \in L$  e  $x_2 \in Q$ ) então  $Ax = Ax_1 + Ax_2 = Ax_2 \leq b$ , logo  $x \in P$ .

Falta ver que  $Q$  é um poliedro pontuado, ou seja que  $\text{lin. space}(Q) = \{0\}$ . Seja  $y \in \text{lin. space}(Q)$ , sabemos pela observação 3.35 que  $\{x + \lambda y : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq Q$  para qualquer  $x \in Q$ . Como  $Q \subseteq P$ , temos que  $A(x + \lambda y) \leq b$  para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$ , logo  $Ay = 0$ . Portanto  $y \in L$ , e como  $Q \subseteq L^\perp$ ,  $y^T(x + \lambda y) = y^T x + \lambda \|y\|^2 = 0$  para todo o  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Donde se tira que  $y = 0$ . Portanto  $\text{lin. space}(Q) = \{0\}$  ( $Q$  é pontuado).  $\square$

Resulta imediatamente dos dois últimos resultados a seguinte proposição.

**Proposição 3.57.** *Qualquer poliedro  $P$  não-vazio pode ser decomposto da forma*

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(R) + L$$

onde  $L = \text{lin. space}(P)$ ,  $V$  é o conjunto dos vértices de  $P \cap L^\perp$  e  $R$  é um conjunto que consiste em um vector direcção para cada semi-recta extrema de  $P \cap L^\perp$ .

**Observação 3.58.** Esta decomposição é mínima no sentido que se  $P = \text{conv}(V') + \text{cone}(R') + L'$  de modo que  $\text{cone}(R')$  não contenha nenhum subespaço próprio, então  $L' = L$ ,  $V \subseteq V'$  e  $R \subseteq R'$  (sendo que nesta última inclusão devemos assumir que os vectores direcção são unitários).

Outra observação que podemos fazer é a seguinte.

**Observação 3.59.** Qualquer subespaço linear é um cone finitamente gerado.



De facto, se  $b_1, b_2, \dots, b_s$  formam uma base do subespaço  $L$  então  $L = \text{cone}(b_1, \dots, b_s, u)$  onde  $u = -b_1 - \dots - b_s$ .

Uma vez que a soma de dois cones é um cone ( $\text{cone}(R_1) + \text{cone}(R_2) = \text{cone}(R_1 \cup R_2)$ ), temos que:

**Proposição 3.60.** *Qualquer poliedro não-vazio  $P$  é a soma de um polítopo  $\text{conv}(V)$  com um cone finitamente gerado  $\text{cone}(R)$ . Sendo que podemos tomar por  $V$  o conjunto dos vértices de  $P \cap L^\perp$  onde  $L = \text{lin. space}(P)$ .*

Iremos mais à frente demonstrar que o recíproco também é válido. Para tal vamos recorrer ao seguinte resultado, conhecido por **teorema de Farkas-Minkowski-Weyl**, não sem antes introduzir a seguinte definição.

**Definição 3.61.** Um *cone poliedral* é um cone da forma  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$ .

**Teorema 3.62.** *Um cone convexo  $K$  é poliedral se e só se é finitamente gerado.*

*Dem.* Primeiro vamos mostrar que um cone poliedral é um cone finitamente gerado.

Seja  $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$  um cone poliedral não-vazio (se for vazio é claramente finitamente gerado). Então, pela proposição 3.60 (pois  $K$  é um poliedro),  $K = \text{conv}(V) + \text{cone}(R)$  onde  $V$  é o conjunto dos vértices de  $K \cap L^\perp$  (onde  $L = \text{lin. space}(K)$ ) e  $R$  é um conjunto vazio. Ora  $V = \{0\}$  logo  $K = \text{cone}(R)$  é um cone finitamente gerado.

Por outro lado, para qualquer cone finitamente gerado  $K = \text{cone}(\{a_1, \dots, a_k\})$ , o seu cone polar é poliedral  $K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq 0, 1 \leq i \leq k\}$ . Logo pelo que acabamos de demonstrar,  $K^\circ$  é finitamente gerado  $K^\circ = \text{cone}(\{b_1, \dots, b_s\})$ . Portanto, sendo  $K$  pelo corolário 2.40 fechado, temos que  $K = K^{\circ\circ} = \{x \in \mathbb{R}^n : b_i^T x \leq 0, 1 \leq i \leq s\}$ , ou  $K$  é poliedral.  $\square$

Estamos agora em condições de enunciar e demonstrar o próximo resultado conhecido como **teorema da representação de Motzkin** ou **teorema da decomposição para poliedros**.

**Teorema 3.63.** *Um conjunto convexo  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  é um poliedro se e só se existem conjuntos finitos  $V$  e  $R$  tais que*

$$P = \text{conv}(V) + \text{cone}(R).$$

*Dem.* Vimos pela proposição 3.60 que se  $P$  é um poliedro então  $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(R)$  com  $V$  e  $R$  conjuntos finitos.

Consideremos então um conjunto da forma  $Q = \text{conv}(V) + \text{cone}(R)$  com  $V$  e  $R$  finitos, e vejamos que  $Q$  é um poliedro.  $x \in Q$  se e só se

$$x = \sum_i \lambda_i v_i + \sum_j \mu_j r_j$$

com  $\sum_i \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i$ 's e  $\mu_j$ 's não-negativos,  $v_i \in V$  e  $r_j \in R$ . O que é equivalente a dizer que

$$(x, 1) = \sum_i \lambda_i (v_i, 1) + \sum_j \mu_j (r_j, 0)$$

com  $\lambda_i$ 's e  $\mu_j$ 's não-negativos,  $v_i \in V$  e  $r_j \in R$  (ou seja  $(x, 1)$  é uma combinação cónica dos vectores  $(v_i, 1)$  e  $(r_j, 0)$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Portanto  $x \in Q$  se e só se  $(x, 1) \in Q'$  onde  $Q' = \text{cone}(\{(v, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} : v \in V\} \cup \{(r, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} : r \in R\})$ . Como  $Q'$  é um cone finitamente gerado existe, pelo teorema de Farkas-Minkowski-Weyl, uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{m, n+1}$  tal que  $Q' = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : Ax \leq 0\}$ . Temos então que  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, 1) \in Q'\} = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x \leq b\}$  onde  $A' \in \mathbb{R}^{m, n}$  é a submatriz de  $A$  formada pelas primeiras  $n$  colunas de  $A$  e  $b \in \mathbb{R}^m$  é o vector simétrico da última coluna de  $A$  ( $b_i = -a_{i, n+1}$ ). Portanto  $Q$  é um poliedro.  $\square$

Deste teorema conclui-se facilmente o seguinte corolário.

**Corolário 3.64.** *Um conjunto é um polítopo se e só se é um poliedro limitado.*

*Dem.* Exercício.  $\square$

**Exercícios:**

**Exercício 3.65.** Demonstre a observação 3.58.

**Exercício 3.66.** Demonstre a corolário 3.64.

**Exercício 3.67.** Mostre que  $\text{cone}(R_1) + \text{cone}(R_2) = \text{cone}(R_1 \cup R_2)$ .

**Exercício 3.68.** Mostre que uma transformação linear transforma poliedros em poliedros.

**Exercício 3.69.** Mostre que se  $P$  e  $Q$  são dois poliedros então  $\text{cl}(\text{conv}(P \cup Q))$  é também um poliedro. Dê um exemplo em que  $\text{cl}(\text{conv}(P \cup Q)) \neq \text{conv}(P \cup Q)$ .

**Faces de um poliedro.**

**Definição 3.70.** Seja  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  um poliedro. Uma *desigualdade válida* para  $P$  é uma desigualdade linear  $c^T x \leq \alpha$  que é satisfeita por todo o  $x \in P$ . Ou seja  $P \subseteq H_{\leq}(c, \alpha)$ .

**Definição 3.71.** Uma desigualdade válida  $c^T x \leq \alpha$  diz-se *suportiva* se existe um ponto  $x_0 \in P$  tal que  $c^T x_0 = \alpha$ . Ou seja  $P \cap H_{=}(c, \alpha) \neq \emptyset$ .

**Definição 3.72.** Uma *face* de  $P$  é um conjunto  $F$  da forma

$$F = P \cap H_{=}(c, \alpha)$$

para uma desigualdade válida  $c^T x \leq \alpha$ , dizemos então que  $F$  é a *face induzida* por  $c^T x \leq \alpha$ .

Um caso particular de uma face de  $P$  é o próprio  $P$  como se vê na seguinte observação.

**Observação 3.73.**  $P$  é face de  $P$  induzida pela desigualdade  $0^T x \leq 0$ .

**Definição 3.74.**  $P$  e  $\emptyset$  são chamadas de *faces triviais* de  $P$ . As restantes faces são chamadas de *faces próprias*.

**Teorema 3.75.** Seja  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ . Um conjunto não-vazio  $F$  é uma face de  $P$  se e só se  $F = \{x \in P : A'x = b'\}$  para algum subsistema  $A'x \leq b'$  de  $Ax \leq b$ .

*Dem.* Se  $F$  é uma face não-vazia então existe um  $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $F = \{x \in P : c^T x = \alpha\}$  com  $\alpha = \max\{c^T x : x \in P\}$ . Pelo teorema da dualidade  $\alpha = \min\{y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0\}$ . Seja  $y^* \in \mathbb{R}^m$  uma solução optimal de  $(D)$  e seja  $I' = \{i = 1, \dots, m : y_i^* > 0\}$ . Para qualquer  $x \in P$  temos que

$$c^T x = (y^{*T} A)x = \sum_{i=1}^m y_i^* (Ax)_i = \sum_{i \in I'} y_i^* (Ax)_i \leq \sum_{i \in I'} y_i^* b_i = \alpha$$

Temos portanto que  $c^T x = \alpha$  se e só se  $(Ax)_i = b_i$  para qualquer  $i \in I'$ . Ou seja  $F = \{x \in P : a_i^T x = b_i, i \in I'\}$ .

Por outro lado, seja  $F$  um conjunto da forma  $F = \{x \in P : A'x = b'\}$  para um subsistema  $A'x \leq b'$  de  $Ax \leq b$ . Ou seja,  $F = \{x \in P : a_i^T x = b_i, i \in I'\}$  com  $I' \subseteq \{1, \dots, m\}$ . Vejamos que  $F$  é a face induzida pela desigualdade  $c^T x \leq \alpha$  onde  $c = \sum_{i \in I'} a_i$  e  $\alpha = \sum_{i \in I'} b_i$ .  $\alpha = \sum_{i \in I'} b_i$  é uma desigualdade válida pois  $x \in P \Rightarrow Ax \leq b \Rightarrow A'x \leq b' \Rightarrow c^T x \leq \alpha$ . Se  $x \in F$  então  $x \in P$  e  $A'x = b'$  o que implica que  $x \in P$  e  $c^T x = \alpha$ , logo  $F \subseteq P \cap H_{=}(c, \alpha)$ . E se  $x \in P \cap H_{=}(c, \alpha)$  então  $\alpha = c^T x = 1^T A'x \leq 1^T b' = \alpha$  o que implica que  $a_i^T x = b_i \forall i \in I'$ , logo  $P \cap H_{=}(c, \alpha) \subseteq F$ .  $\square$

Este resultado diz-nos que uma face de  $P$  pode ser caracterizada como  $F = \{x \in P : A'x = b', A''x \leq b''\}$  onde  $A'$  e  $A''$  formam uma decomposição da matriz  $A$ , e  $b'$  e  $b''$  formam a correspondente decomposição do vector  $b$ .

**Corolário 3.76.** Seja  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  um poliedro. Então

- (i)  $P$  tem um número finito de faces;
- (ii) Cada face de  $P$  é poliedro;
- (iii) Seja  $F$  uma face de  $P$  (logo  $F$  é um poliedro por (ii)). Então um subconjunto  $G$  de  $F$  é uma face de  $F$  se e só se é uma face de  $P$ .

Dem. Exercício. □

**Definição 3.77.** (1) Uma *face minimal* de  $P$  é uma face não-vazio de  $P$  que não contém estritamente uma outra face não-vazia de  $P$ ;

(2) Uma *face maximal* de  $P$  é uma face própria de  $P$  que não está estritamente contida numa outra face própria de  $P$ .

**Teorema 3.78.** *Seja  $F$  um subconjunto não-vazio de um poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ . Então  $F$  é uma face minimal de  $P$  se e só se  $F$  é um conjunto afim da forma:*

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b'\}$$

para algum subsistema  $A'x \leq b'$  de  $Ax \leq b$ .

Dem. Seja  $F = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b', A''x \leq b''\}$  uma face minimal de  $P$  com  $A'x \leq b'$  e  $A''x \leq b''$  subsistemas de  $Ax \leq b$ , e seja  $I''$  o conjunto dos índices que formam o subsistema  $A''x \leq b''$ . Podemos assumir que, para cada  $i \in I''$ ,  $A'x = b' \wedge a_j^T x \leq b_j \forall j \in I'' \setminus \{i\} \not\Rightarrow a_i^T x \leq b_i$  (i.e.  $a_i^T x \leq b_i$  é não-redundante)<sup>2</sup> poderíamos retirar a desigualdade  $a_i^T x \leq b_i$  ao sistema  $A''x \leq b''$ . Assim existe, para cada  $i \in I''$ , pelo menos um  $y_i \in \mathbb{R}^n$  tal que  $A'y_i = b'$ ,  $a_j^T y_i \leq b_j \forall j \in I'' \setminus \{i\}$  e  $a_i^T y_i > b_i$ . Como o conjunto  $F$  é não-vazio, para cada  $i \in I''$  o conjunto  $F_i = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b', A''x \leq b'', a_i^T x = b_i\} \subseteq F$  é não-vazio (se  $x \in F$  então existe um  $\lambda_i \in [0, 1[$  tal que  $\lambda_i y_i + (1 - \lambda_i)x \in F_i$ ). Como  $F$  é uma face minimal temos que  $F_i = F$  (ou seja,  $a_i^T x \leq b_i$  é uma igualdade implícita) e portanto podemos transferir a igualdade  $a_i^T x = b_i$  do sistema  $A''x \leq b''$  para o sistema  $A'x \leq b'$  de modo que no final deste processo ficamos com  $F = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b'\}$ .

Por outro lado se  $\emptyset \neq F \subseteq P$  é um conjunto da forma  $F = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b'\}$ , então qualquer face  $F'$  de  $F$  é, pelo teorema 3.75, da forma  $F' = \{x \in F : A''x = b''\} = F \cap \{x \in \mathbb{R}^n : A''x = b''\}$  para algum subsistema  $A''x \leq b''$  do sistema  $(A'x \leq b' \wedge -A'x \leq -b')$ . Mas nesse caso temos  $F \subseteq \{x \in F : A''x = b''\}$  logo  $F$  é uma face minimal. □

**Corolário 3.79.** *Cada face minimal  $F$  de  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  é um transladado de lin. space( $P$ ), e portanto  $\dim(F) = n - \text{car}(A)$ . Se  $P$  é pontuado então as faces minimais de  $P$  são os conjuntos singulares formados pelos vértices de  $P$ .*

Dem. Exercício. □

**Definição 3.80.** Dado um sistema do tipo

$$\begin{aligned} a_i^T x &= b_i \text{ com } i \in I_1 \\ a_i^T x &\leq b_i \text{ com } i \in I_2 \end{aligned}$$

Dizemos que o sistema é *minimal* se:

- (1) nenhuma desigualdade pode ser transformada em igualdade sem alterar o conjunto de soluções;
- (2) nenhum constrangimento (desigualdade ou igualdade) é *redundante* (ou seja, pode ser removido sem alterar o conjunto de soluções).

Neste caso dizemos que o sistema é uma *representação minimal* do poliedro que é conjunto solução do sistema.

**Teorema 3.81.** *O sistema*

$$\begin{aligned} a_i^T x &= b_i \text{ com } i \in I_1 \\ a_i^T x &\leq b_i \text{ com } i \in I_2 \end{aligned}$$

é uma representação minimal de um poliedro  $P$  não-vazio se e só se:

- (1)  $\{a_i\}_{i \in I_1}$  é um conjunto linearmente independente;
- (2) A aplicação 
$$I_2 \longrightarrow \mathcal{F}$$
  
 $i \longmapsto \{x \in P : a_i^T x = b_i\}$ , onde  $\mathcal{F}$  é o conjunto das facetos (faces maximais) de  $P$ , é uma bijecção.

<sup>2</sup>Neste caso dir-se-ia que a desigualdade  $a_i^T x \leq b_i$  seria *redundante*.

*Dem.* Ver teorema 2.25 do texto de Geir Dahl que está na bibliografia da página web da cadeira.  $\square$

**Observação 3.82.** Se  $F$  é uma face própria de um poliedro  $P$  então  $\dim F < \dim P$ .

**Teorema 3.83.** Seja  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  um poliedro não-vazio e  $F \subseteq P$  uma face própria de  $P$ . São equivalentes as seguintes afirmações:

- (i)  $F$  é uma faceta de  $P$ ;
- (ii)  $\dim F = \dim P - 1$ ;
- (iii) Se  $a, \bar{a} \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha, \bar{\alpha} \in \mathbb{R}$  são tais que  $F = \{x \in P : a^T x = \alpha\} = \{x \in P : \bar{a}^T x = \bar{\alpha}\}$  onde  $a^T x \leq \alpha$  e  $\bar{a}^T x \leq \bar{\alpha}$  são ambas desigualdades válidas para  $P$ , então existem  $\gamma > 0$  e  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  (onde  $m$  é o número de linhas de  $A$ ) tais que  $\bar{a}^T = \gamma a^T + \lambda^T A$  e  $\bar{\alpha} = \gamma \alpha + \lambda^T b$ .

*Dem.* Ver teorema 2.27 do texto de Geir Dahl que está na bibliografia da página web da cadeira.  $\square$

### Exercícios:

**Exercício 3.84.** Demonstre o corolário 3.76.

**Exercício 3.85.** Demonstre o corolário 3.79.

**Exercício 3.86.** Demonstre a observação 3.82.

**Exercício 3.87.** Determine as faces dos seguintes poliedros:

(a)  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  definido pelo sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \\ x \leq 3 \\ y \leq 2 \\ x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 15 \end{cases}$$

(b)  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  definido pelo sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y + z \geq 0 \\ x + y - z \geq 0 \end{cases}$$

(c)  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  definido pelo sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ x + y + z \geq 1 \\ y \leq 3 \\ x + y \leq 5 \\ z \leq 10 \end{cases}$$

**Exercício 3.88.** Seja  $P$  um poliedro de dimensão  $n$  e seja  $d = \dim(\text{lin. space } P)$ . Mostre que existem faces  $F_d, F_{d+1}, \dots, F_n$  de  $P$ , tais que  $F_i \subset F_{i+1}$  e  $\dim F_i = i$ .

## 4. ALGORITMO SIMPLEX

Consideremos o problema primal de programação linear:

$$(P) \quad \max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

Podemos assumir que  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  com  $\text{car}(A) = m$  (logo  $m \leq n$ ) pois se as linhas de  $A$  não forem linearmente independentes temos que ou o sistema  $Ax = b$  é inconsistente ou podemos retirar-lhe equações, sem alterar o conjunto de soluções, de modo a que todas as equações sejam linearmente independentes.

**Observação 4.1.** O poliedro  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$  é pontuado.

Observemos também que qualquer problema PL pode ser reduzido a problema de tipo (P). Por exemplo as soluções ótimas do problema  $\min\{c^T x : x \in P\}$  coincidem com as soluções ótimas do problema  $\max\{(-c)^T x : x \in P\}$  sendo que  $\min\{c^T x : x \in P\} = -\max\{(-c)^T x : x \in P\}$ . Por outro lado se tivermos um problema do tipo

$$(A) \quad \max\{c^T x : Ax \leq b\}$$

este pode ser transformado no problema

$$(B) \quad \max\{\tilde{c}^T \tilde{x} : \tilde{A}\tilde{x} = b, \tilde{x} \geq 0\}$$

onde  $\tilde{c}^T = [c^T \mid -c^T \mid 0] \in \mathbb{R}^{2n+m}$ ,  $\tilde{A} = [A \mid -A \mid I] \in \mathbb{R}^{m,2n+m}$  e  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{2n+m}$ . Neste caso  $x \in \mathbb{R}^n$  é solução (ótimal) de (A) se e só se  $x = x_1 - x_2$  para algum  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  que seja solução (ótimal) de (B).

**Notações:** Dado um vector  $z \in \mathbb{R}^J$  (respectivamente uma matriz  $M \in \mathbb{R}^{I \times J}$ ), com  $I = \{1, \dots, m\}$  e  $J = \{1, \dots, n\}$ , e um subconjunto de índices  $J' = \{j_1, \dots, j_k\} \subseteq J$  denotamos por  $z_{J'}$  (resp.  $M_{J'}$ ) o subvector de  $z$  (resp. a submatriz de  $M$ ) definido por

$$z_{J'} = [z_j]_{j \in J'} \quad \left( \text{resp. } M_{J'} = [m_{i,j}] \begin{matrix} i \in I \\ j \in J' \end{matrix} \right)$$

**Exemplo 4.2.** Considerando  $z = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$ ,  $M = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$  e  $J = \{2, 4\}$  temos que  $z_J =$

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix} \text{ e } M_J = \begin{bmatrix} b & d \\ f & h \end{bmatrix}$$

**Definição 4.3.** Dada uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  com característica  $m$  e um subconjunto de índices  $B = (b_1, \dots, b_m) \subseteq \{1, \dots, n\}$ , dizemos que  $A_B$  é uma *base* e que  $B$  é um *conjunto de índices de base* se  $A_B$  for não-singular.

**Observação 4.4.** Como  $\text{car}(A) = m$ ,  $A$  tem pelo menos um conjunto de índices de base.

**Definição 4.5.** A um conjunto de índices de base  $B \subseteq J$  para  $A \in \mathbb{R}^{I \times J}$  associamos a *solução básica primal*  $x^B = (x_B, x_N)$  onde  $x_N = 0$  ( $N = J \setminus B$ ) e  $x_B = A_B^{-1}b$ .

As variáveis de  $x_B$  (i.e.  $x_j$  com  $j \in B$ ) são chamadas de *variáveis básicas* e as variáveis de  $x_N$  são chamadas de *variáveis não-básicas*.

**Observação 4.6.** Qualquer solução básica primal  $x^B = (x_B, x_N)$  é solução do sistema  $Ax = b$ .

**Definição 4.7.** Se uma solução básica primal  $x^B$  pertence a  $P$  (ou seja  $x_B \geq 0$ ) então  $x^B$  é chamada de *solução básica primal viável*.

**Lema 4.8.** O conjunto dos vértices de  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$  coincide com o conjunto das soluções básicas viáveis de  $Ax = b, x \geq 0$ .

*Dem.* Seja  $v$  um vértice de  $P$ ,  $v$  terá de ser solução de  $n$  equações linearmente independentes retiradas do sistema  $Ax = b, x \geq 0$ . Como  $\text{car}(A) = m$ , pelo menos  $n - m$  dessas equações terão de vir do subsistema  $x \geq 0$ . Por outro lado, como  $v \in P$ ,  $v$  obedece a todas as  $m$  equações do subsistema  $Ax = b$ . Assim o subsistema que define  $v$  é formado (ou pode ser formado) pelas  $m$  equações do sistema  $Ax = b$  mais  $n - m$  equações do sistema  $x \geq 0$ . Seja  $N \subseteq \{1, \dots, n\}$  o conjunto dos  $n - m$  índices  $j$  tais que  $v_j = 0$ . A matriz associada ao subsistema que define  $v$  é da forma

$$\begin{bmatrix} A_B & A_N \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

onde  $B = \{1, \dots, n\} \setminus N$ . Como, por definição de vértice, esta matriz tem de ser não-singular e por conseguinte  $A_B$  é também não-singular. Logo  $v = x^B$  é uma solução básica (viável pois  $v \in P$ ).

Por outro lado se  $x^B$  é uma solução básica viável então  $x^B$  pertence a  $P$  e é solução do subsistema

$$\begin{bmatrix} A_B & A_N \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ora, sendo  $A_B$  não-singular, as  $n$  equações deste sistema são linearmente independentes logo a sua única solução  $x^B$  é um vértice de  $P$ .  $\square$

Consideremos o problema dual de  $(P)$ :

$$(D) \quad \min\{y^T b : y^T A \geq c^T\}$$

**Definição 4.9.** Dado um conjunto de índices de base  $B$ , seja  $A_B$  a base associada a  $B$  e  $x^B$  a correspondente solução básica primal.

Definimos a *solução básica dual*  $y^B \in \mathbb{R}^m$  como sendo  $(y^B)^T = c_B^T A_B^{-1}$ .

Temos então que  $(y^B)^T A = (y^B)^T [A_B | A_N] = [c_B^T | (y^B)^T A_N]$ . Logo uma solução básica dual  $y^B$  é *solução básica dual viável* (i.e.  $(y^B)^T A \geq c^T$ ) se  $(y^B)^T A_N \geq c_N^T$ .

As soluções básicas  $x^B$  e  $y^B$  são chamadas de *complementares* por satisfazerem a *condição de folga complementar*:

$$((y^B)^T A - c^T) x^B = 0$$

**Proposição 4.10.** *Assumindo que  $B$  é um conjunto de índices de base tal que as soluções básicas  $x^B$  (primal) e  $y^B$  (dual), respectivamente, são viáveis temos que  $x^B$  é optimal em  $(P)$  e  $y^B$  é optimal em  $(D)$ .*

*Dem.* Como  $x^B$  é uma solução básica viável primal,  $x^B \in P$  logo  $c^T x^B \leq v(P)$ . Por outro lado, como  $y^B$  é uma solução básica viável dual,  $y^B \in D$  logo  $(y^B)^T b \geq v(D)$ . Pelo teorema da dualidade temos que  $v(P) = v(D)$ , o que junto com o facto de

$$c^T x^B = c_B^T x_B = c_B^T A_B^{-1} A_B x_B = (y^B)^T A_B x_B = (y^B)^T b$$

nos leva a concluir que  $c^T x^B = v(P)$  e  $(y^B)^T b = v(D)$ .  $\square$

**Observação 4.11.** Seja  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  ( $m \leq n$ ),  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  e um problema PL  $(P)$   $\max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ .

Seja  $B = \{B_1, \dots, B_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  com  $B_1 < \dots < B_m$  um conjunto de índices de base e  $A_B$  a base associada a  $B$  e  $A$ . Então o problema  $(P)$  é equivalente ao problema  $P(B)$  relativo à corrente base  $B$ :

$$(P(B)) \quad c_B^T \bar{b} + \max\{\bar{c}_N^T x_N : x_B + \bar{A}_N x_N = \bar{b}, x_B \geq 0, x_N \geq 0\}$$

onde  $\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N$ ,  $\bar{b} = A_B^{-1} b$  e  $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ .

De facto, temos

$$\begin{aligned} Ax = b, x \geq 0 &\Leftrightarrow A_B x_B + A_N x_N = b, x_B \geq 0, x_N \geq 0 \Leftrightarrow x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b, x_B \geq 0, x_N \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_B + \bar{A}_N x_N = \bar{b}, x_B \geq 0, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

e

$$c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N) + c_N^T x_N = c_B^T \bar{b} + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N = c_B^T \bar{b} + \bar{c}_N^T x_N$$

**Definição 4.12.** Ao vector  $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$  chamamos *vector de custo reduzido*.

**Observação 4.13.** Se  $\bar{c}_N^T \leq 0$  então a solução básica primal associada a  $B$ ,  $x^B = (x_B, x_N) = (A_B^{-1}b, 0) = (\bar{b}, 0)$ , é solução optimal de  $(P(B))$  (logo também o é de  $(P)$ ). Tal pode ser deduzido pela proposição 4.10 observando que a solução básica dual,  $y^B = c_B^T A_B^{-1}$ , é solução viável de  $(D)$  ( $y^B A = c_B^T A_B^{-1} [A_N | A_N] = [c_B^T | c_B^T A_B^{-1} A_N] \geq [c_B^T | c_N^T] = c^T$ ).

**Observação 4.14.** Se  $\bar{c}_N^T \not\leq 0$  então existe um índice  $r \in N$  tal que  $\bar{c}_r > 0$ . Neste caso solução básica primal  $x^B$  não é solução optimal pois podemos incrementar a variável  $x_r$ .

De facto, para  $\lambda_r \geq 0$  podemos construir uma solução de  $Ax = b$  do seguinte modo:

$$\begin{cases} (x(\lambda_r))_r &= \lambda_r \\ x(\lambda_r)_j &= 0 & \text{para } j \in N \setminus \{r\} \\ x(\lambda_r)_B &= \bar{b} - \bar{a}_r \lambda_r & \text{onde } \bar{a}_r \text{ é a coluna de índice } r \text{ de } \bar{A}_N \end{cases}$$

É fácil ver que  $x(\lambda_r)$  satisfaz  $x(\lambda_r)_B + \bar{A}_N x(\lambda_r)_N = \bar{b}$  e que  $x(\lambda_r)_N \geq 0$  para qualquer  $\lambda_r \geq 0$ . No entanto, para que  $x(\lambda_r)$  seja uma solução viável (em particular  $x(\lambda_r)_B \geq 0$ ), é necessário que  $\lambda_r$  satisfaça a condição  $\bar{a}_{i,r} \lambda_r \leq \bar{b}_i$  para todo o  $i \in B$ . Uma vez que  $\bar{b} \geq 0$  (pois partimos de uma solução básica primal viável) temos que se  $\bar{a}_{i,r} \leq 0$  então  $\bar{a}_{i,r} \lambda_r \leq \bar{b}_i$  para todo o  $\lambda_r \geq 0$ , e se  $\bar{a}_{i,r} > 0$  então  $\bar{a}_{i,r} \lambda_r \leq \bar{b}_i$  se e só se  $\lambda_r \leq \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,r}}$ .

Logo, temos que o valor máximo de  $\lambda_r$  para o qual  $x(\lambda_r)$  é solução viável é

$$\lambda_r^* = \begin{cases} \min\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,r}} : 1 \leq i \leq m, \bar{a}_{i,r} > 0\} & \text{se } \bar{a}_r \not\leq 0 \\ \infty & \text{se } \bar{a}_r \leq 0 \end{cases}$$

No caso em que  $\lambda_r^*$  é finito (ou seja, quando  $\bar{a}_r \not\leq 0$ ) consideremos o conjunto

$$B^*(r) = \{B_i : 1 \leq i \leq m, \bar{a}_{i,r} > 0, \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,r}} = \lambda_r^*\}$$

temos que  $x(\lambda_r^*)_i = 0$  para qualquer  $i \in B^*(r)$ .

**Observação 4.15.**  $x(\lambda_r) \geq 0$  para qualquer  $0 \leq \lambda_r \leq \lambda_r^*$ .

**Definição 4.16.** Dizemos que uma solução básica primal  $x^B$  é *degenerada* se  $x_{B_i} = 0$ <sup>3</sup> para algum  $i \leq m$  (ou dito de outra forma,  $x_i = 0$  para algum  $i \in B$ ). Caso contrário (i.e.  $x_B > 0$ ) dizemos que  $x^B$  é não-degenerada.

**Observação 4.17.**  $x(\lambda_r) \neq x(0) = x^B$  se e só se  $\lambda_r > 0$ .

**Observação 4.18.** Se  $x^B$  é não-degenerada então  $\lambda_r > 0$ .

**Proposição 4.19.** Considere-se um conjunto de índices de base  $B$  com  $x_B \geq 0$  e um  $r \in J \setminus B$ . Defina-se  $\lambda_r^*$  e  $x(\lambda_r^*)$  como foi feito atrás. Seja

$$F = \{x(\lambda_r) : 0 \leq \lambda_r \leq \lambda_r^*\}.$$

Então temos sempre que:

- (i) Se  $\lambda_r = 0$ , o vértice  $x_0 = x^B$  é degenerado e para cada  $s \in B^*(r)$  o conjunto  $(B \setminus \{s\}) \cup \{r\}$  é um conjunto de índices de base com solução básica viável  $x_0$ .
- (ii) Se  $0 < \lambda_r^* < \infty$ , cada um dos conjuntos  $(B \setminus \{s\}) \cup \{r\}$  (com  $s \in B^*(r)$ ) é um conjunto de índices de base com solução básica viável  $x(\lambda_r^*)$ . Além disso,  $F = \{x(\lambda_r) : 0 \leq \lambda_r \leq \lambda_r^*\} = \text{conv}(\{x^B, x(\lambda_r^*)\})$  é aresta (i.e. uma face de dimensão 1) de  $P$  que junta os dois vértices  $x^B$  e  $x(\lambda_r^*)$ .
- (iii) Se  $\lambda_r^* = \infty$ , então o conjunto  $F = \{x(\lambda) : \lambda \geq 0\}$  é uma semi-recta extrema de  $P$  (i.e. uma face de dimensão 1 ilimitada).

<sup>3</sup>Note-se que  $x_{B_i} = \bar{b}_i$ .

*Dem.* Vejamos para os casos (i) e (ii) que, se  $B$  é um conjunto de índices de base com solução básica  $x^B$  viável e  $s \in B^*$ ,  $B' = (B \setminus \{s\}) \cup \{r\}$  é um conjunto de índices de base com solução básica viável  $x(\lambda_r^*)$  ( $= x^B$  se  $\lambda^* = 0$ ).

Sendo  $A_B$  não-singular, temos que a coordenada  $s$  da solução única  $x$  do sistema  $A_B x = a_r$  (onde  $a_r$  é a coluna de índice  $r$  de  $A$ ) é dada, pela regra de Cramer, por

$$x_s = \frac{\det(A_{B'})}{\det(A_B)}$$

Por outro lado pode ser dada por

$$x_s = e_s^T x = e_s^T A_B^{-1} a_r = e_s^T A_B^{-1} A_N e_r = e_s^T \bar{A}_N e_r = \bar{a}_{s,r}$$

Como  $s \in B^*$ , temos que  $\bar{a}_{s,r} > 0$  logo  $\det(A_{B'}) \neq 0$ . Ou seja,  $B'$  é um conjunto de índices de base.

Do modo como  $x(\lambda_r^*)$  foi construído temos que  $x(\lambda_r^*)_i = 0$  para qualquer  $i \in N' = J \setminus B' = (N \setminus \{r\}) \cup \{s\}$  e  $Ax(\lambda_r^*) = b$ :

$$\begin{aligned} Ax(\lambda_r^*) &= \sum_{i \in J} a_i x(\lambda_r^*)_i \\ &= \sum_{i \in B} a_i (\bar{b} - \bar{a}_r \lambda_r^*)_i + a_r \lambda_r^* \\ &= A_B (\bar{b} - \bar{a}_r \lambda_r^*) + a_r \lambda_r^* \\ &= A_B \bar{b} - A_B \bar{a}_r \lambda_r^* + a_r \lambda_r^* \\ &= A_B \bar{b} && \text{pois } \bar{a}_r = A_B^{-1} a_r \\ &= b && \text{pois } \bar{b} = A_B^{-1} b \end{aligned}$$

logo  $x(\lambda_r^*)$  é solução básica de  $B'$  (i.e.  $x(\lambda_r^*)_{B'} = A_{B'}^{-1} b$  e  $x(\lambda_r^*)_{N'} = 0$ ), e é viável pois foi construído de modo a garantir tal ( $x(\lambda_r^*)_{B'} \geq 0$ ).

Fica como exercício ver que  $F$ , para (ii) e para (iii), é uma face de dimensão 1.  $\square$

### Algoritmo simplex:

**Passo 0** (inicialização) Seja  $B$  um conjunto de índices de base tal que a solução básica primal  $x^B$  é viável. Calcula-se  $x_B = A_B^{-1} b$  e  $(y^B)^T = c^T A_B^{-1}$ .

**Passo 1** (verificação optimal) Calcula-se o custo reduzido  $\bar{c}_N^T = c_N^T - (y^B)^T A_N$ .

- Se  $\bar{c}_N \leq 0$ , então termina-se;  $x^B$  é optimal em  $(P)$  e  $y^B$  é optimal em  $(D)$ .
- Caso contrário, escolhe-se  $r \notin B$  com  $\bar{c}_r > 0$  e faz-se passo 2.

**Passo 2** (pivoting) Determina-se  $\lambda_r^*$  e  $B^*(r)$ .

- Se  $B^*(r)$  é vazio (caso em que  $\bar{a}_r \leq 0$  logo  $\lambda_r^* = +\infty$ ), então  $(P)$  é ilimitado;  $x(\lambda_r) \in P$  para todo o  $\lambda_r \geq 0$  e  $c^T x(\lambda_r) \rightarrow +\infty$  quando  $\lambda_r \rightarrow +\infty$ .
- Caso contrário, escolhe-se um  $s \in B^*(r)$  e redefine-se o conjunto de índices de base como sendo  $B := (B \setminus \{s\}) \cup \{r\}$ . Determina-se as novas soluções básicas primal e dual  $x^B$  e  $y^B$ , e regressa-se ao passo 1.

Note-se que para iniciar o algoritmo temos de encontrar uma solução básica viável. Isso pode ser feito do seguinte modo:

Dado um problema de programação linear

$$(P) \quad \max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

podemos assumir primeiro que  $b \geq 0$  (se algum  $b_i$  for menor que zero podemos substituir a equação  $a_i^T x = b_i$  do sistema pela sua simétrica  $-a_i^T x = -b_i$  sem alterar a resolução do problema). Consideremos então o problema de programação linear

$$(PI) \quad \min\{\mathbf{1}^T y : Ax + y = b, x \geq 0, y \geq 0\}$$

onde  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^m$  é o vector em que todas as entradas são 1 e  $y \in \mathbb{R}^m$  é um vector de variáveis de folga. É fácil ver que se  $(P)$  é consistente então  $(PI)$  tem valor optimal  $v(PI) = 0$  com solução optimal  $(x_0, y_0)$  em que  $y_0 = 0$  e  $x_0$  é um vértice de  $P$  (logo é uma solução básica viável de  $(P)$ ). Além disso temos que  $(PI)$  tem uma solução básica viável imediata que é dada por  $(x, y) = (0, b)$ .



**Exemplo 4.20.** Consideremos o problema de programação linear ( $P$ ):

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \\ \text{Sujeito a: } & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \text{Com: } & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Para determinar uma solução básica viável para este problema procedemos do seguinte modo (sobretudo para problemas mais complexos que este). Tomamos o problema ( $PI$ ):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & x_5 + x_6 + x_7 \\ \text{Sujeito a: } & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 3 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ \text{Com: } & x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

e resolvemo-lo com o algoritmo simplex inicializando o problema com o conjunto de índices de base  $B = \{5, 6, 7\}$ ,  $A_B = I$  e  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^B = (0, 0, 0, 0, 2, 3, 1)$ . A solução optimal obtida  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*)$  será tal que  $x_5^* = x_6^* = x_7^* = 0$  sendo que  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$  é uma solução básica viável do problema ( $P$ ).

Em alguns casos porém, é imediato encontrar uma solução básica viável sem ter que recorrer ao procedimento anterior. É por exemplo o caso de um problema do tipo  $\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}$  com  $b \geq 0$ . Este problema é equivalente a  $\max\{c^T x : Ax + y = b, x \geq 0, y \geq 0\}$  sendo  $(0, b)$  uma solução básica viável associada ao conjunto de índices de base correspondente às variáveis de folga (variáveis associadas a  $y$ ).

**Exemplo 4.21.** Considerando o problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeito a: } & x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ \text{Com: } & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Este problema é equivalente ao problema

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \text{Sujeito a: } & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ \text{Com: } & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Neste caso inicializamos o problema com o conjunto de índices de base  $B = \{4, 5\}$ ,  $A_B = I$  e  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^B = (0, 0, 0, 2, 3)$ .

Em seguida vamos mostrar que para aplicar o algoritmo simplex não é necessário calcular a matriz  $A_B^{-1}$  e os vectores  $x_B = A_B^{-1}b$  e  $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$  à parte. Estes podem ser calculados em conjunto num processo algo semelhante ao método de eliminação de Gauss.

Consideremos para um problema de programação linear

$$\max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

o seguinte *tableau*:

$A$	$b$
$c^T$	$0$

tendo já um conjunto de índices de base  $B$ , podemos tableau da forma

$A_B$	$A_N$	$b$
$c_B^T$	$c_N^T$	0

Note-se que as colunas de  $A_B$  podem estar misturadas com as colunas de  $A_N$  (o mesmo para  $c_B^T$  e  $c_N^T$ ). Assim, multiplicando a parte superior do tableau por  $A_B^{-1}$  (o que pode ser feito usando o método de Gauss-Jordan) obtemos:

$I$	$\bar{A}_N$	$\bar{b}$
$c_B^T$	$c_N^T$	0

onde  $\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N$  e  $\bar{b} = A_B^{-1} b$ .

Para obter  $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T \bar{A}_N$  basta aplicar o método de eliminação de Gauss à última linha de modo a anular todas a componente  $c_B^T$ , ficamos portanto com:

$I$	$\bar{A}_N$	$\bar{b}$
0	$\bar{c}_N^T$	$-c_B^T \bar{b}$

Note-se que na última coluna temos a parte não-nula da solução básica  $x_B = \bar{b}$  e o simétrico do valor associado à solução básica  $c^T x^B = c_B^T \bar{b}$ .

Estamos agora no **passo 1** do algoritmo.

Se  $\bar{c}_N \leq 0$  o algoritmo termina, a solução optimal corresponde a tomar  $x_i = 0$  para as variáveis não-básicas ( $i \in N$ ) e  $x_i = \bar{b}_j$  se a coluna  $i$  do tableau for igual a  $e_j$  para as variáveis básicas ( $i \in B$ ). O valor optimal será o simétrico do valor obtido no canto inferior direito do tableau.

Se  $\bar{c}_N \not\leq 0$  então escolhe-se uma variável não-básica  $\bar{c}_r > 0$  e vamos para o **passo 2**.

Se a coluna por cima de  $\bar{c}_r$  (coluna  $\bar{a}_r$ ) é menor ou igual a zero ( $\bar{a}_r \leq 0$ ) então o problema é ilimitado ( $v(P) = +\infty$ ). Senão escolhe-se de entre as entradas positivas  $\bar{a}_{i,r} > 0$  de  $\bar{a}_r$  uma  $\bar{a}_{s,r}$  que tenha o menor rácio  $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,r}}$ . Essa entrada será um novo pivot do tableau, através do método de eliminação de Gauss coloca-se a zero todas as restantes entradas da coluna  $r$  do tableau (incluindo a entrada  $\bar{c}_r$ ).

Obtemos um novo tableau com novo conjunto de índices de base  $(B \setminus \{s\}) \cup \{r\}$ . Voltamos ao passo 1.

Vejamos um exemplo:

**Exemplo 4.22.** Consideremos o problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar:} & x_1 \\
 \text{Sujeito a:} & x_1 + 2x_2 \leq 11 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\
 & x_1 - x_2 \leq 1 \\
 \text{Com:} & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

este problema é equivalente (juntando as variáveis de folga  $x_3, x_4$  e  $x_5$ ) ao problema:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar:} & x_1 \\
 \text{Sujeito a:} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\
 & 2x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\
 & x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\
 \text{Com:} & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{array}$$

Temos neste caso, uma solução básica imediata dada pelos índices  $B = \{3, 4, 5\}$  (corresponde às variáveis de folga). O tableau fica com o passo 0 automaticamente feito:

		↓	↓	↓	
1	2	1	0	0	11
2	1	0	1	0	8
1	-1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0

O  $\bar{c}_N^T$  é dado por  $(1, 0)$  que é a parte da linha de baixo que não corresponde às variáveis básicas (assinaladas com setas). Como  $\bar{c}_N \not\leq 0$ , tomamos uma coluna  $r$  com  $\bar{c}_r > 0$  (neste caso é a primeira) e procuramos de entre as entradas positivas (neste caso são todas) da coluna  $a$  que tem menor rácio  $\frac{\bar{b}_i}{a_{i,r}}$  (neste caso é a terceira pois  $\frac{1}{1} < \frac{8}{2} < \frac{11}{1}$ ):

1	2	1	0	0	11
2	1	0	1	0	8
(1)	-1	0	0	1	1
<u>1</u>	0	0	0	0	0

tornamos, usando eliminação de Gauss, essa entrada num pivot:

0	3	1	0	-1	10
0	3	0	1	-2	6
<b>1</b>	-1	0	0	1	1
0	1	0	0	-1	-1

Mudamos então de conjunto de índices de base:

↓		↓	↓		
0	3	1	0	-1	10
0	3	0	1	-2	6
<b>1</b>	-1	0	0	1	1
0	1	0	0	-1	-1

Repetimos o processo até obtermos  $\bar{c}_N \leq 0$ :

0	3	1	0	-1	10
0	(3)	0	1	-2	6
1	-1	0	0	1	1
0	<u>1</u>	0	0	-1	-1

pois  $\frac{6}{3} < \frac{10}{3}$ .

↓	↓	↓			
0	0	1	-1	1	4
0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2
1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	3
0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-3

Temos portanto que a solução optimal é  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 2, 4, 0, 0)$  (no problema original é simplesmente  $(x_1, x_2) = (3, 2)$  pois as restantes variáveis são de folga) e o valor optimal é 3.

Note-se que, se não ocorreram erros de cálculo, devem-se verificar as seguintes situações:

A coluna superior direita do tableau (correspondente a  $\bar{b}$ ) é sempre maior ou igual a zero.

Após o passo 0, o valor no canto inferior direito do tableau nunca aumenta à medida que o algoritmo é iterado.

Assim, se alguma destas situações não se verificar é porque houve algum erro de cálculo.

### Exercícios:

**Exercício 4.23.** Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{Sujeito a: } & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \text{Com: } & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Use o método do Simplex para determinar uma solução básica viável para o problema.
- Resolver o problema usando o método do Simplex inicializando com a solução básica calculada na linha anterior.

**Exercício 4.24.** Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{Sujeito a: } & x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ \text{Com: } & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema, usando o método do Simplex.

**Exercício 4.25.** Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & -2x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a: } & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ \text{Com: } & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema, usando o método do Simplex.

**Exercício 4.26.** Pretende-se cultivar um determinado tipo de alga a um custo mínimo.

A alga só se desenvolve em cultura se a água dos tanques contiver as exactas proporções de 100mg de cloreto de sódio por litro de água, 20mg de iodeto de potássio por litro de água e 30mg de fosfato de cálcio por litro de água.

Os custos destes químicos em estado puro são de 4 euros ao quilo para o cloreto de sódio, 10 euros ao quilo para o iodeto de potássio e 20 euros ao quilo para o fosfato de cálcio, mas existem no mercado dois compostos químicos mais baratos. O composto A custa 2 euros o quilo e contém 50% de cloreto de sódio, 20% de iodeto de potássio e 30% de fosfato de cálcio; o composto B custa 1 euro o quilo e contém 40% de cloreto de sódio, 10% de iodeto de potássio e 10% de fosfato de cálcio, sendo o resto substrato inerte (nota: as percentagens referem-se ao peso).

Dadas estas condições, pretende-se fertilizar a água de um tanque de 10 mil litros a custo mínimo, usando estes 5 produtos químicos.

- Formalize o problema como problema de programação linear.
- Resolva o problema usando o método do Simplex, tomando como solução básica inicial a que só faz uso dos químicos em estado puro.

**Exercício 4.27.** Um criador de porcos pretende determinar as quantidades de cada tipo de ração que devem ser dadas a cada animal, por forma a conseguir uma certa quantidade nutritiva a um custo mínimo.

O tipo de ração em granulado tem 20g/kg de hidratos de carbono, 50g/kg de vitaminas, 30g/kg de proteínas e custa 10 euros ao quilo.

O tipo de ração em farinha tem 50g/kg de hidratos de carbono, 10g/kg de vitaminas, 30g/kg de proteínas e custa 5 euros ao quilo.

As quantidades mínimas diárias requeridas por cada porco são de 200g de hidratos de carbono, 150g de vitaminas e 210g de proteínas.

- Formalize o problema como problema de programação linear.
- Resolva o problema usando o método do Simplex.

**Exercício 4.28.** Um navio é encarregue de transportar com cem toneladas de turfa, cinquenta toneladas de feno e cento e cinquenta toneladas de estrume. A turfa ocupa 20 metros cúbicos por tonelada, o feno ocupa 110 metros cúbicos por tonelada e o estrume ocupa 10 metros cúbicos por tonelada. Esta carga deve ser distribuída pela popa e pela proa do navio de modo que a carga em ambas as partes do navio tenham igual peso. Além disso o volume total da carga não pode exceder os 5 mil metros cúbicos na popa e os 10 mil metros cúbicos na proa. O capitão do navio pretende encontrar a distribuição de carga que minimize a quantidade de estrume na popa onde reside a tripulação.

- Formalize o problema como problema de programação linear.
- Resolva o problema usando o método do Simplex.

**Exercício 4.29.** Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{Sujeito a: } & x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & |x_1 - x_3| \leq x_2 + 1 \\ \text{Com: } & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolva o problema, usando o método do Simplex.

#### Correcção do algoritmo simplex.

**Observação 4.30.** Se num dado momento tivermos que a solução básica  $x^B$  é não-degenerada (logo  $\lambda_r^* > 0$  pela observação 4.18) então no passo seguinte o valor alvo  $c^T x$  é incrementado.

De facto, se  $B' = (B \setminus \{s\}) \cup \{r\}$  for o novo conjunto de índices de base, a nova solução básica é dada por  $x(\lambda_r^*)$  e o novo valor alvo será:

$$\begin{aligned} c^T x^{B'} &= c^T x(\lambda_r^*) = c_B^T x(\lambda_r^*)_B + c_N^T x(\lambda_r^*)_N = c_B^T (\bar{b} - \bar{a}_r \lambda_r^*)_B + c_N^T e_r \lambda_r^* = \\ &= c_B^T \bar{b} + (c_N^T - c_B^T \bar{A}_N) e_r \lambda_r^* = c_B^T x_B + \bar{c}_r \lambda_r^* > c_B^T x_B = c^T x^B \end{aligned}$$

**Observação 4.31.** Em cada iteração do algoritmo o vector  $x^B$  é um dos vértice de  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$  e estes são em número finito.

Resulta da observação 4.31 que se o algoritmo não termina é porque entra em ciclo fechado. Pela observação 4.30 tal só poderá acontecer se as iterações que formam o ciclo dão-se todas em soluções básicas degeneradas.

Embora hipoteticamente o algoritmo simplex possa entrar em ciclo, tal é muito raro de acontecer. Há, no entanto, regras que permitem evitar de todo qualquer possibilidade do algoritmo entrar em ciclo. Uma delas é a **regra de Bland** que se pode definir da seguinte maneira:

- Escolhe-se para a coluna  $r$  com  $\bar{c}_r > 0$  a primeira nessa condição. Ou seja,  $r = \min\{i : \bar{c}_i > 0\}$ .
- Escolhe-se para novo pivot a entrada  $\bar{a}_{s,r} > 0$ , de entre as  $\bar{a}_{i,r} > 0$  que satisfazem a condição de rácio  $\bar{b}_i / \bar{a}_{i,r}$  mínimo, cujo o pivot correspondente à sua linha tem índice de coluna mais baixo<sup>4</sup>.

Esta regra simples garante que o algoritmo simplex não entra em ciclo.

**Teorema 4.32.** Usando a regra de Bland, o algoritmo simplex termina em tempo finito.

<sup>4</sup>Se tivermos o cuidado de ao fim de cada passo do algoritmo permutarmos as linhas do tableau de modo a que os pivots apareçam em ordem crescente, então esta regra resume-se a escolher a entrada  $\bar{a}_{s,r} > 0$  com menor índice  $s$ .

*Dem.* Suponhamos por absurdo que o algoritmo entra em ciclo (já vimos que é o único caso que pode impedir que o algoritmo termina em tempo finito). Para simplificar, podemos retirar todas as linhas e colunas do tableau que não contenham pivots que entram no ciclo sem que isso condicione a existência do ciclo. Tomamos então o tableau com tais linhas e colunas removidas:

$A$	$b$
$c^T$	$0$

Como foi observado a existência de um ciclo implica que todas as soluções básicas sejam degeneradas, resulta então, da remoção das linhas que não contenham os pivots do ciclo, que  $b = 0$ . Consideremos agora os dois seguintes tableau:

$$T_1 : \begin{array}{|c|c|} \hline A' & 0 \\ \hline c'^T & 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{e} \quad T_2 : \begin{array}{|c|c|} \hline A'' & 0 \\ \hline c''^T & 0 \\ \hline \end{array}$$

onde  $T_1$  corresponde ao tableau antes da última coluna entrar na base e  $T_2$  corresponde ao tableau antes da última coluna sair da base sendo substituída por uma coluna  $p$ .

Como estamos a usar a regra de Bland temos que no tableau  $T_1$ :

$$c'_n > 0 \text{ e } c'_i \leq 0 \quad \forall i < n$$

e no tableau  $T_2$  temos:

$$c''_p > 0, \text{ para algum } p < n, \quad a''_{m,p} > 0 \text{ e } a''_{i,p} \leq 0 \quad \forall i < m$$

Note-se que estamos a assumir que temos  $n$  variáveis e  $m$  equações (i.e.  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  são matrizes  $m$  por  $n$ ). Consideremos então o seguinte vector  $y \in \mathbb{R}^n$  definido por:

$$y_j = \begin{cases} -a''_{i,p} & \text{se } B''(i) = j \\ 1 & \text{se } j = p \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Onde  $B'' = \{B''(1), \dots, B''(m)\}$  é o conjunto de índices de base associado ao tableau  $T_2$ . Do mesmo modo,  $B' = \{B'(1), \dots, B'(m)\}$  é o conjunto de índices de base associado ao tableau  $T_1$ . É fácil ver que  $y$  é solução de  $A''x = 0$ . Como, pelo algoritmo simplex,  $A' = A_{B'}^{-1}A$  e  $A'' = A_{B''}^{-1}A$ , temos também  $A'y = 0$ . E sendo  $c'^T = c^T - c_{B'}^T A'$  e  $c''^T = c^T - c_{B''}^T A''$ , temos que  $c'^T y = c''^T y$ .

Ora  $c''^T y = c''_p > 0$  e por outro lado

$$c'^T y = \sum_{j=1}^n c'_j y_j = c'_p + \sum_{i=1}^m c'_{B''(i)} (-a''_{i,p}) = c'_p - c'_n a''_{m,p} - \sum_{i=1}^{m-1} c'_{B''(i)} a''_{i,p} < 0$$

pois  $c'_p \leq 0$ ,  $c'_n > 0$ ,  $a''_{m,p} > 0$  e, para  $i < m$ ,  $c'_{B''(i)} \leq 0$  e  $a''_{i,p} \leq 0$ . Chegamos assim a uma contradição. Donde concluímos que o algoritmo não pode entrar em ciclo.  $\square$

Para terminar damos um exemplo de um ciclo fechado que pode surgir na aplicação do algoritmo Simplex sem usar a regra de Bland:

**Exemplo 4.33.** Considere o problema PL na forma de tableaux dado por:

$A$	$B$	$I$	$0$
$a^T$	$b^T$	$0^T$	$0$

onde  $A$ ,  $B$  e  $I$  são matrizes reais  $2 \times 2$  ( $I$  é a matriz identidade) e  $a$ ,  $b$  e  $0$  vectores de  $\mathbb{R}^2$ . Se  $A$  for invertível,  $A^{-1}B = A$ ,  $A^{-1} = B$ ,  $b - aA^{-1}B = a$  e  $-aA^{-1} = b$  (o que acontece se  $A^2 + A + I = 0$ ) então pode dar-se o caso de ao escolher as duas primeiras variáveis como básicas (se o método simplex o permitir) ficarmos com o tableaux na forma:

$I$	$A$	$B$	$0$
$0^T$	$a^T$	$b^T$	$0$

e obteríamos um ciclo (de ordem 6) no método Simplex:

$A$	$B$	$I$	$0$	$\rightarrow$	$I$	$A$	$B$	$0$	$\rightarrow$	$B$	$I$	$A$	$0$	$\rightarrow$	$A$	$B$	$I$	$0$
$a^T$	$b^T$	$0^T$	$0$		$0^T$	$a^T$	$b^T$	$0$		$b^T$	$0^T$	$a^T$	$0$		$a^T$	$b^T$	$0^T$	$0$

Para tal acontecer é necessário que  $A^2 + A + I = 0$  (exercício), ou seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -(\alpha^2 + \alpha + 1)/\beta & -\alpha - 1 \end{bmatrix} \quad \text{com } \beta \neq 0 \quad (\text{exercício})$$

e, além disso, é necessário que o vector  $a$  e a matriz  $A$  satisfaçam condições extras para que se possa escolher como pivots as variáveis associadas a  $A$ . Uma condição suficiente para tal é tomar  $\alpha > 0$  e  $a^T = (1, \mu)$  com  $\mu > \frac{\beta}{\alpha}$  (exercício).

Um exemplo pode ser,

$(1)$	$1$	$-2$	$-1$	$1$	$0$	$0$	$\rightarrow$	$1$	$1$	$-2$	$-1$	$1$	$0$	$0$	$\rightarrow$	$1$	$0$	$(1)$	$1$	$-2$	$-1$	$0$	$\rightarrow$	
$-3$	$-2$	$3$	$1$	$0$	$1$	$0$		$0$	$(1)$	$-3$	$-2$	$-3$	$1$	$0$		$0$	$1$	$-3$	$-2$	$3$	$1$	$0$		$\rightarrow$
$(1)$	$2$	$-4$	$-1$	$0$	$0$	$0$		$0$	$(1)$	$-2$	$0$	$-1$	$0$	$0$		$0$	$0$	$(1)$	$2$	$-4$	$-1$	$0$		$\rightarrow$
$1$	$0$	$1$	$1$	$-2$	$-1$	$0$	$\rightarrow$	$-2$	$-1$	$1$	$0$	$(1)$	$1$	$0$	$\rightarrow$	$-2$	$-1$	$1$	$0$	$1$	$1$	$0$	$\rightarrow$	
$-3$	$1$	$0$	$(1)$	$-3$	$-2$	$0$		$3$	$1$	$0$	$1$	$-3$	$-2$	$0$		$-3$	$-2$	$-3$	$1$	$0$	$(1)$	$0$	$\rightarrow$	
$-1$	$0$	$0$	$(1)$	$-2$	$0$	$0$		$-4$	$-1$	$0$	$0$	$(1)$	$2$	$0$		$-2$	$0$	$-1$	$0$	$0$	$(1)$	$0$	$\rightarrow$	
$1$	$1$	$-2$	$-1$	$1$	$0$	$0$																		
$-3$	$-2$	$3$	$1$	$0$	$1$	$0$																		
$1$	$2$	$-4$	$-1$	$0$	$0$	$0$																		

**Exercício 4.34.** Resolva o exemplo anterior usando a regra de Bland.

## 5. GRAFOS

### Definições básicas.

**Definição 5.1.** Um *grafo não-orientado* (respectivamente *grafo não-orientado* ou *digrafo*) é um par ordenado  $(V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto (finito) de elementos chamados *vértices* e  $E$  é um conjunto (finito) de pares não-ordenados (resp. orientados) de vértices.

Uma aresta  $e = \{x, y\} \in E$  (usaremos também as notações  $[x, y]$  ou simplesmente  $xy$ ) diz-se *incidente* aos vértices  $X$  e  $y$ , e estes dizem-se *incidentes* à aresta  $e$ . Neste caso, também se diz que os vértices  $x$  e  $y$  são *adjacentes* entre si e que os *extremos* da aresta  $e$ . Duas arestas dizem-se *adjacentes* se partilham um mesmo vértice como um dos seus dois extremos.

Se os extremos de uma aresta  $e$  forma iguais (i.e.  $e = xx$ ), dizemos que a aresta  $e$  é um *loop* (ou *lacete*).

Em alguns casos, pode-se considerar grafos com arestas paralelas também chamados de *multigrafos*. Em tais grafos, para cada par de vértices  $x$  e  $y$  pode haver múltiplas arestas (ditas *arestas paralelas*) que tenham  $x$  e  $y$  como extremos. Para definir rigorosamente um multigrafo ou consideramos que o conjunto das arestas  $E$  é um multiconjunto de pares não-ordenados de  $V$ , ou consideramos que o conjunto das arestas  $E$  não é formado por pares não-ordenados de  $V$  mas juntamos à definição de multigrafo uma aplicação (dita de incidência) que a cada elemento de  $E$  faz corresponder um par não-ordenado de  $V$ .

Sempre que neste texto for escrito a palavra grafo sem mais adjectivos está-se a referir apenas a um grafo não-orientado sem loops nem arestas paralelas (aquilo que muitos autores chamam de *grafo simples*).

Chama-se *ordem* de um grafo  $G = (V, E)$  ao número de vértices  $|V|$ , e *tamanho* do grafo ao número de arestas  $|E|$ .

**Definição 5.2.** Dado um grafo  $G = (V, E)$  com ordem  $|V| = n$  e tamanho  $|E| = m \geq 1$  definimos a *matriz de incidência* como sendo uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n,m}$  em que as linhas são numeradas pelos vértices, as colunas são numeradas pelas arestas e a entrada genérica  $a_{i,j}$  da matriz é 1 se o vértice  $i$  é incidente à aresta  $j$ , 0 caso contrário.

**Observação 5.3.** A matriz de incidência de um grafo é única a menos de permutações de linhas ou colunas.

**Definição 5.4.** Dado um grafo  $G = (V, E)$  com ordem  $|V| = n$  e definimos a *matriz de adjacência* como sendo uma matriz quadrada  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  cujas as linhas e as colunas são numeradas pelos vértices e a entrada genérica  $a_{i,j}$  da matriz é 1 se os vértices  $i$  e  $j$  são adjacentes, 0 caso contrário.

**Observação 5.5.** A matriz de adjacência de um grafo é simétrica e única a menos de conjugação por matrizes de permutação.

**Definição 5.6.** Chamamos *grau* de um vértice  $v$  ao número de aresta incidentes a  $v$  e geralmente denota-se tal número por  $d(v)$ .

**Observação 5.7.** O número de entradas iguais a 1 numa dada linha, quer da matriz de incidência quer da matriz de adjacência de um dado grafo, é igual ao grau do vértice associado a essa linha. O número de entradas iguais a 1 em cada coluna da matriz de incidência é sempre igual a 2.

**Proposição 5.8.** Se  $J$  é uma matriz de incidência de dado grafo  $G$ , então  $JJ^T = A + D$  onde  $A$  é uma matriz de adjacência de  $G$  e  $D$  é uma matriz diagonal cuja entrada  $(i, i)$  é o grau do vértice associado à linha  $i$  da matriz de incidência  $J$ .

*Dem.* Exercício. □

**Proposição 5.9.**

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

*Dem.* Exercício. □

**Corolário 5.10.** O número de vértices de um grafo com grau ímpar é par.

*Dem.* Exercício. □

**Definição 5.11.** Um *homomorfismo* entre dois grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  é uma aplicação  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$  tal que para cada aresta  $e = [u, v]$  de  $G_1$  o par  $[\phi(u), \phi(v)]$  é uma aresta de  $G_2$ . Ou seja,  $[u, v] \in E_1 \Rightarrow [\phi(u), \phi(v)] \in E_2$ .

Se aplicação  $\phi$  for bijetiva, quer nos vértices quer nas arestas (i.e.  $[u, v] \in E_1 \Leftrightarrow [\phi(u), \phi(v)] \in E_2$ ), dizemos que  $\phi$  é um *isomorfismo* de grafos e que  $G_1$  e  $G_2$  são *isomorfos*.

**Observação 5.12.** Se dois grafos são isomorfos então possuem as mesmas matrizes de incidência e de adjacência.

Sai imediatamente desta observação que podemos recuperar o grafo original a partir das suas matrizes de incidência e de adjacência. Na verdade basta a matriz de incidência ou a matriz de adjacência (a menos que estejamos a considerar multigrafos em vez de grafos).

**Definição 5.13.** Um grafo  $H = (U, F)$  diz-se *subgrafo* de  $G = (V, E)$  se  $U \subseteq V$  e  $F \subseteq E$ .

Seja  $G = (V, E)$  um grafo e sejam  $U \subseteq V$  e  $F \subseteq E$ . O *subgrafo induzido* por  $U$ , denotado por  $G[U]$ , é o grafo  $(U, E[U])$  onde  $E[U] := \{[u, v] \in E : u, v \in U\}$ , dizemos então que  $G[U]$  é um *subgrafo vértice-induzido*. O *subgrafo induzido* por  $F$ , denotado por  $G[F]$ , é o grafo  $(V, F)$ , dizemos então que  $G[F]$  é um *subgrafo aresta-induzido*.

**Observação 5.14.** O subgrafo vértice-induzido  $G[U]$  é o maior subgrafo de  $G$  que tem  $U$  como conjunto de vértices. O subgrafo aresta-induzido  $G[F]$  é o maior subgrafo de  $G$  que tem  $F$  como conjunto de arestas.



**Definição 5.15.** O *complemento* de um grafo  $G = (V, E)$  é o grafo  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  onde  $\bar{E} := \{[u, v] : u, v \in V, u \neq v \text{ e } [u, v] \notin E\}$  (i.e.  $\bar{E}$  é o conjunto de pares não-ordenados de vértices que não sejam lacetes nem pertencem a  $E$ ).

Um grafo  $G = (V, E)$  diz-se *nulo* se  $V = \emptyset$  (logo  $E = \emptyset$ ), *vazio* se  $E = \emptyset$  (sem que  $V$  seja necessariamente vazio) e *completo* se o seu complemento for vazio (i.e.  $\bar{E} = \emptyset$ ).

**Exercícios:**

**Exercício 5.16.** Demonstre a proposição 5.8.

**Exercício 5.17.** Demonstre a proposição 5.9.

**Exercício 5.18.** Demonstre o corolário 5.10.

**Exercício 5.19.** Desenhe o grafo cuja matriz de incidência é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine a sua matriz de adjacência e os graus dos seus vértices.

**Exercício 5.20.** Determine um homomorfismo entre os grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$ , com  $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$ ,  $E_1 = \{[v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_3, v_4], [v_4, v_5], [v_5, v_6], [v_6, v_7], [v_7, v_2]\}$ ,  $V_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$  e  $E_2 = \{[w_1, w_2], [w_2, w_3]\}$ .

**Problema do caminho mais curto.**

**Definição 5.21.** Um *percurso* ou *passagem* num grafo  $G = (V, E)$  é uma sequência finita alternada de vértices e arestas  $W : v_0, e_0, v_1, \dots, e_{n-1}, v_n$  com  $v_i \in V$  e  $e_i = [v_i, v_{i+1}] \in E$  para todo o  $i$ . Dizemos que  $W$  é um percurso- $v_0v_n$  e que  $v_0$  e  $v_n$  são os vértices finais do percurso.

**Definição 5.22.** O *comprimento* (usual) de um percurso é o número de arestas do percurso.

**Proposição 5.23.** Seja  $A$  a matriz de adjacência de um grafo  $G$  e seja  $n \geq 1$ . Então a entrada  $(i, j)$  de  $A^n$  é igual à quantidade de diferentes percursos- $v_i v_j$  com comprimento  $n$ .

*Dem.* Exercício. □

**Definição 5.24.** Um *caminho* é um percurso onde os vértices não se repetem (logo as arestas também não).

**Definição 5.25.** Dois vértices  $u$  e  $v$  de um dado grafo dizem-se *conectáveis* se existe um percurso- $uv$ . Se qualquer par de vértices de dado grafo forem conectáveis então o grafo diz-se *conexo*.

**Observação 5.26.** A existência de um percurso- $uv$  garante a existência de um caminho- $uv$ . Pelo que na definição anterior podemos trocar percurso- $uv$  por caminho- $uv$  sem alterar o seu significado.

**Definição 5.27.** A noção de conectável forma uma relação de equivalência no conjunto dos vértices de um grafo  $G$ . Aos subgrafos induzidos por cada uma das suas classes de equivalência chama-se *componentes conexas* de  $G$ .

**Definição 5.28.** Um *grafo com pesos* (ou *comprimentos*) é um grafo  $G = (V, E)$  com uma *função peso* (ou *comprimento*) nas arestas  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . O *peso* ou *comprimento*  $w(P)$  de um caminho (ou percurso)  $P : v_0, e_0, \dots, e_{n-1}, v_n$  é definido como sendo a soma dos pesos das suas arestas:

$$w(P) = \sum_{e \in P \cap E} w(e).$$

**Definição 5.29.** Dado um grafo  $G = (V, E)$  e uma função comprimento  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , define-se a *distância* entre dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  como sendo o menor comprimento entre os caminho- $uv$  (caso  $u$  e  $v$  sejam conectáveis):

$$d_w(u, v) = \min\{w(P) : P \text{ é caminho-}uv\}$$

Caso  $u$  e  $v$  não sejam conectáveis, define-se  $d_w(u, v) = +\infty$ .

**Observação 5.30.** Para qualquer percurso- $uv$  existe um caminho- $uv$  mais curto (ou com peso menor). Logo na definição de distância entre dois vértices também podemos considerar percursos em vez de apenas caminhos.

**Observação 5.31.** Se  $w \geq 0$  então  $d_w$  é uma pseudométrica ( $d_w(x, y) = 0 \not\Rightarrow x = y$ ), se  $w > 0$  então  $d_w$  é uma métrica e se  $w = 1$  temos a métrica usual no grafo:  $w(P) = \text{número de aretas em } P$ .

**Definição 5.32.** Um *problema do caminho mais curto* consiste em dado um grafo  $G = (V, E)$  com uma função comprimento nas arestas  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  e dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$ , encontrar um caminho- $uv$ ,  $P$ , que minimize o comprimento (ou peso). Ou seja,  $w(P) = d_w(u, v)$ .

**Lema 5.33.** Seja  $u_0$  um vértice fixo de um dado grafo conexo  $G = (V, E)$  e  $S$  um conjunto de vértices que contém  $u_0$ . Seja  $\bar{S} = V \setminus S$  o complemento de  $S$ .

Se  $\bar{S} \neq \emptyset$ , existe sempre um vértice  $v_0 \in \bar{S}$  e um caminho- $u_0v_0$ ,  $P : u_0, u_1, \dots, u_k, v_0$ <sup>5</sup>, tal que:

- (i)  $u_j \in S$  para  $j \leq k$ ;
- (ii) O caminho  $u_0, \dots, u_k$  é o caminho- $u_0u_k$  mais curto em  $G$  e portanto também o é em  $G[S]$  (o subgrafo de  $G$  induzido por  $S$ );
- (iii)  $w(P) = d(u_0, v_0) = d(u_0, \bar{S}) := \min\{d(u_0, v) : v \in \bar{S}\}$

Donde resulta que

$$d(u_0, v_0) = d(u_0, u_k) + w([u_k, v_0]) = \min\{d(u_0, u) + w([u, v]) : u \in S, v \in \bar{S}\}.$$

*Dem.* Sendo  $\bar{S}$  um conjunto finito não-vazio é óbvio que existe um vértice  $v' \in \bar{S}$  tal que  $d(u_0, v') = d(u_0, \bar{S})$ . Seja  $P' : u_0, u_1, \dots, u_{k'}, v'$  um caminho- $u_0v'$  com  $w(P') = d(u_0, v')$  (i.e.  $P'$  é um caminho- $u_0v'$  mais curto), e seja  $v_0$  o primeiro vértice do caminho  $P'$  tal que  $v_0 \in \bar{S}$ . Se  $v_0 = v'$  então temos o pretendido  $P = P'$ . Senão,  $v_0 = u_{k+1}$  com  $k+1 \leq k'$ . Temos então que  $P : u_0, u_1, \dots, u_k, v_0$  é um caminho que satisfaz (i) (claro do modo como  $P$  é definido) e (ii) (se  $u_0, u_1, \dots, u_k$  não fosse um caminho- $u_0u_k$  minimal então  $P' : u_0, u_1, \dots, u_k, \dots, u_{k'}, v'$  não seria um caminho- $u_0v'$  minimal). Além disso  $v_0$  e  $P$  satisfazem também (iii) pois o facto de  $P$  estar contido em  $P'$  implica que  $d(u_0, v_0) = w(P) \leq w(P') = d(u_0, \bar{S})$  e por outro lado  $v_0 \in \bar{S}$  implica  $d(u_0, v_0) \geq d(u_0, \bar{S})$ . É fácil verificar (exercício) que as igualdades  $d(u_0, v_0) = d(u_0, u_k) + w([u_k, v_0]) = \min\{d(u_0, u) + w([u, v]) : u \in S, v \in \bar{S}\}$  resultam das condições (i), (ii) e (iii).  $\square$

Este último resultado fundamenta o seguinte algoritmo para determinar o caminho mais curto.

#### Algoritmo de Dijkstra:

Dado um grafo conexo  $G = (V, E)$  e um vértice inicial  $u_0$  procedemos do seguinte modo:

Passo 0 Definimos  $S := \{u_0\}$ ,  $L(u_0) := 0$  e  $L(v) := +\infty$  para cada  $v \in V \setminus \{u_0\}$ . Se  $|V| = 1$ , o algoritmo termina.

Passo 1 Para cada  $v \notin S$  procede-se do seguinte modo: Se o mínimo de  $L(u) + w([u, v])$  para  $u \in S$  e  $[u, v] \in E$  é menor que  $L(v)$ , então redefine-se  $L(v) := \min\{L(u) + w([u, v]) : u \in S, [u, v] \in E\}$  e o vértice  $v$  recebe uma nova etiqueta  $(L(v), u)$ .

Passo 2 Determina-se  $\min_{v \in \bar{S}} L(v)$  e seja  $v$  um vértice onde o mínimo é atingido.

Passo 3 Redefine-se  $S := S \cup \{v\}$ . Se  $S = V$ , então termina-se o algoritmo, a distância de  $u_0$  a  $v$  é dada por  $L(v)$  e um<sup>6</sup> caminho mais curto pode ser deduzido através das etiquetas  $(L(v), u)$

<sup>5</sup>Note-se que um caminho pode ser dado como uma sequência de apenas vértices (estando as arestas implícitas) ou de apenas arestas (estando os vértices implícitas).

<sup>6</sup>Note-se que no passo 2 o vértice a escolher pode não ser único, pelo que o caminho mais curto não será necessariamente único.

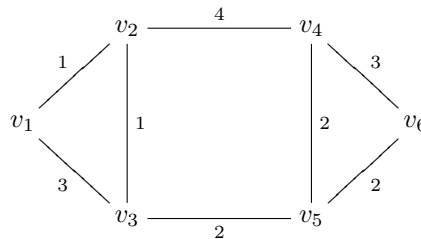
(se  $v$  recebe a etiqueta  $(L(v), u)$  então  $u$  é o vértice que precede  $v$  num caminho- $u_0v$  mais curto). Senão retorna-se ao passo 1.

**Definição 5.34.** Um conjunto do tipo  $\{[u, v] : u \in S, v \in \bar{S}\}$  chama-se um *corde* de  $S$  e denota-se por  $\delta(S)$ .

**Observação 5.35.** Este algoritmo pode ser aplicado a grafos orientados (digrafos) para determinar o caminho dirigido mais curto. Note-se que nesse caso  $[u, v] \neq [v, u]$ .

**Observação 5.36.** O algoritmo também pode ser ligeiramente modificado de modo a poder ser aplicado a grafos não conexos. Nesse caso, se após o passo 1 tivermos  $\min_{v \in \bar{S}} L(v) = +\infty$  o algoritmo deve terminar pois os vértices em  $\bar{S}$  não conectáveis a  $u_0$ . O  $S$  final será o conjunto dos vértices da componente conexa de  $G$  que contém  $u_0$  e o algoritmo determina as distâncias  $d(u_0, v) = L(v)$  bem como caminhos- $u_0v$  mais curtos para todos os vértices de  $S$ .

**Exemplo 5.37.** Considere-se o seguinte grafo:



Para aplicar o algoritmo vamos construir a seguinte tabela, na primeira coluna colocamos os vértices por ordem de inclusão no conjunto  $S$  (as linhas da tabela vão sendo construídas à medida que o algoritmo é aplicado), na segunda coluna colocamos as respectivas etiquetas. Quanto às restantes colunas, estas serão indexadas pelos vértices do grafo e servem para o cálculo dos  $L(v_i)$ 's. Na linha em que o vértice  $v_i$  surge na primeira coluna, a entrada correspondente ao vértice  $v_j$  será um X se  $v_j$  já estiver em  $S$  (i.e.  $v_j$  aparece antes de  $v_i$  na primeira coluna),  $L(v_i) + w([v_i, v_j])$  se  $v_j \notin S$  e  $[v_i, v_j]$  for uma aresta de  $G$  ou  $\infty$  se  $v_j \notin S$  e  $v_i$  for adjacente a  $v_j$ . Por exemplo a primeira linha da tabela será:

$S$	etiqueta	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$v_1$	0	1	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$

Em seguida determina-se de entre as entradas correspondente às linhas de vértices de  $S$  e às colunas de vértices de  $\bar{S}$  (coloridas de verde) aquela que tem menor valor. Se tal entrada corresponder aos vértices  $v_i \in S$  e  $v_j \in \bar{S}$  e tiver valor  $\alpha$  construímos a nova linha correspondente ao vértice  $v_j$  com etiqueta  $(\alpha, v_i)$ . Por exemplo o próximo passo será:

$S$	etiqueta	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$v_1$	0	(1)	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_2$	$(1, v_1)$	X	$1 + 1$	$1 + 4$	$\infty$	$\infty$

seguinte-se:

$S$	etiqueta	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$v_1$	0	1	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_2$	$(1, v_1)$	X	(2)	5	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$(2, v_2)$	X	X	$\infty$	$2 + 2$	$\infty$

e

$S$	etiqueta	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$v_1$	0	1	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_2$	$(1, v_1)$	X	2	5	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$(2, v_2)$	X	X	$\infty$	(4)	$\infty$
$v_5$	$(4, v_3)$	X	X	4 + 2	X	4 + 2

e

$S$	etiqueta	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$v_1$	0	1	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_2$	$(1, v_1)$	X	2	(5)	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$(2, v_2)$	X	X	$\infty$	4	$\infty$
$v_5$	$(4, v_3)$	X	X	6	X	6
$v_4$	$(5, v_2)$	X	X	X	X	5 + 3

e finalmente

$S$	etiqueta	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$v_1$	0	1	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$v_2$	$(1, v_1)$	X	2	5	$\infty$	$\infty$
$v_3$	$(2, v_2)$	X	X	$\infty$	4	$\infty$
$v_5$	$(4, v_3)$	X	X	6	X	(6)
$v_4$	$(5, v_2)$	X	X	X	X	8
$v_6$	$(6, v_5)$	X	X	X	X	X

Temos por exemplo que a distância entre  $v_1$  e  $v_6$  é 6 e um caminho- $v_1v_6$  optimal (mais curto) pode ser encontrado andando de  $v_6$  para trás até  $v_1$  seguindo as etiquetas:  $v_6$  tem  $v_5$  na etiqueta,  $v_5$  tem  $v_3$  na etiqueta,  $v_3$  tem  $v_2$  na etiqueta,  $v_2$  tem  $v_1$  na etiqueta, logo um caminho- $v_1v_6$  optimal é  $P : v_1, v_2, v_3, v_5, v_6$ .

**Exercícios:**

**Exercício 5.38.** Demonstre a proposição 5.23.

**Exercício 5.39.** No quadro que se segue estão dados os preços em euros das ligações por barco entre várias ilhas de dado arquipélago (se na casa XY não aparece nenhum valor é porque não existe ligação directa entre as ilhas X e Y):

Ilha	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A		1		4					
B	1		5		1				
C		5				1			
D	4				1		2		
E		1		1		4		5	
F			1		4				3
G				2				1	
H					5		1		2
I						3		2	

Use o algoritmo de Dijkstra para determinar o percurso de menor custo entre as ilhas A e I.

**Exercício 5.40.** Considere um grafo  $G = (V, E)$  com a distância usual ( $w(e) = 1$  para qualquer  $e \in E$ ). Seja  $A$  a matriz de adjacência de  $G$  e  $a_{i,j}^{(k)}$  a entrada de  $A^k$  (a  $k$ -ésima potência de  $A$ ),

$k \geq 0$ . Mostre que

$$d(v_i, v_j) = \min\{k \geq 0 : a_{i,j}^{(k)} > 0\}$$

**Exercício 5.41.** Considere o seguinte semi-anel (conhecido por *semi-anel tropical*)  $(R, \oplus, \otimes)$  com

$$\begin{aligned} R &:= \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ a \oplus b &:= \min\{a, b\} \\ a \otimes b &:= a + b \end{aligned}$$

Seja  $M(n, R)$  o semi-anel das matrizes quadradas de dimensão  $n$  associado ao semi-anel  $R$ :

$$\begin{aligned} [a_{ij}] \oplus [b_{ij}] &= [c_{ij}] \text{ com } c_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} \\ [a_{ij}] \otimes [b_{ij}] &= [c_{ij}] \text{ com } c_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n (a_{ik} \otimes b_{kj}) \end{aligned}$$

Considere um grafo  $G = (V, E)$  com  $n$  vértices e uma função comprimento nas arestas  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ . Seja  $A \in M(n, R)$  uma matriz com valores em  $R$  cuja entrada genérica  $(i, j)$  é dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ w([v_i, v_j]) & \text{se } i \neq j \text{ e } [v_i, v_j] \in E \\ \infty & \text{se } i \neq j \text{ e } [v_i, v_j] \notin E \end{cases}$$

Mostre que a sucessão das potências de  $A : A, A \otimes A, A \otimes A \otimes A, \dots, A^n, \dots$  estabiliza numa matriz  $D$  (i.e. existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $A^k = D$  para todo o  $k > m$ ) cuja entrada genérica  $(i, j)$  é a distância do vértice  $v_i$  ao vértice  $v_j$  induzida pela função  $w$ .

### Árvores geradoras de peso mínimo.

**Definição 5.42.** Um *circuito* é um percurso fechado (i.e. os vértices finais coincidem). Se num circuito não existirem vértices repetidos este diz-se um *ciclo*.

**Definição 5.43.** Um grafo sem ciclos diz-se um *grafo acíclico* ou *floresta*. Um grafo acíclico conexo é chamado de *árvore*.

**Proposição 5.44.** Se um grafo  $G = (V, E)$  é acíclico então existe pelo menos um vértice com grau menor ou igual a um. Se  $|V| \geq 2$  e  $E \neq \emptyset$  então existem pelo menos dois vértices de grau um.

Dem. Exercício. □

**Corolário 5.45.** Se um grafo  $G = (V, E)$  é acíclico então  $|E| \leq |V| - 1$ .

Dem. Exercício. □

**Proposição 5.46.** Se  $G = (V, E)$  é conexo então  $|E| \geq |V| - 1$ .

Dem. Exercício. □

**Corolário 5.47.** Se  $G = (V, E)$  é uma árvore então  $|E| = |V| - 1$ .

Dem. Exercício. □

**Proposição 5.48.** Sejam  $G_1, G_2$  e  $G_3$  três grafos tais que  $E(G_1) \subseteq E(G_2) \subseteq E(G_3)$  e  $V(G_1) = V(G_2) = V(G_3)$ . Se  $G_2$  é uma árvore então  $G_1$  é acíclico (não conexo se  $E(G_1) \neq E(G_2)$ ) e  $G_3$  é conexo (cíclico se  $E(G_2) \neq E(G_3)$ ).

Dem. Exercício. □

**Proposição 5.49.** Seja  $T = (V, E)$  um grafo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i)  $T$  é uma árvore.
- (ii)  $T$  é conexo e cada aresta de  $T$  é uma ponte<sup>7</sup>.
- (iii) Existe um único caminho entre cada par de vértices.

<sup>7</sup>Uma aresta diz-se uma ponte se ao ser removida o número de componentes conexas do grafo aumenta.

- (iv)  $T$  é conexo e  $|E| = |V| - 1$ .  
 (v)  $T$  é acíclico e  $|E| = |V| - 1$ .

Dem. Exercício. □

**Definição 5.50.** Dado um grafo conexo  $G = (V, E)$ , dizemos que  $T = (V', E')$  é uma *árvore geradora* de  $G$  se  $V' = V$ ,  $E' \subseteq E$  e  $T = (V', E')$  é uma árvore.

**Observação 5.51.** Todo o grafo conexo possui pelo menos uma árvore geradora. O *problema da árvore geradora de peso mínimo* consiste em determinar num grafo com pesos nas aresta uma árvore geradora com peso mínimo.

**Proposição 5.52.** (i) Se  $T = (V, E)$  é uma árvore e  $[v_i, v_j] \notin E$ , então o grafo  $G = (V, E \cup \{[v_i, v_j]\})$  contém exactamente um ciclo  $C'$ .  
 (ii) Se  $C'$  é o único ciclo em (i) e  $[v_k, v_l] \in C' \setminus \{[v_i, v_j]\}$ , então o grafo  $G' = (V, (E \cup \{[v_i, v_j]\}) \setminus \{[v_k, v_l]\})$  é uma árvore.

Dem. (i) Se  $C'$  é um ciclo em  $G$  então  $[v_i, v_j] \in C'$  pois senão  $C'$  estaria contido em  $T$  e  $T$  não seria uma árvore. Como  $T$  é uma árvore, existe um único caminho a ligar  $v_i$  a  $v_j$ , logo, juntamente com a aresta  $[v_i, v_j]$ , este forma o único ciclo em  $G$ .

(ii) Se retirarmos uma aresta a um ciclo de um grafo conexo este permanece conexo. Logo o grafo  $G'$  é conexo. Como o número de arestas de  $G'$  é igual ao número de arestas de  $T$  e  $T$  é um árvore (logo  $|E| = |V| - 1$ ) temos que  $G'$  é uma árvore. □

### Algoritmo de Kruskal:

Dada um grafo conexo  $G = (V, E)$  com  $|V| = n$  e  $|E| = m$  podemos obter uma árvore geradora  $T = (V, F)$  com peso mínimo procedendo do seguinte modo.

Passo 0 Ordena-se as aresta por ordem crescente dos seus pesos:  $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$ .

Inicializa-se com  $F := \emptyset$  e  $k = 1$ .

Passo 1 Se o grafo  $(V, F \cup \{e_k\})$  é acíclico, então redefine-se  $F := F \cup \{e_k\}$ .

Passo 2 Se  $|F| = n - 1$ , então o algoritmo termina  $T = (V, F)$  é uma árvore geradora de peso mínimo. Senão, redefine-se  $k := k + 1$  e retorna-se ao passo 1.

**Observação 5.53.** No passo 1 do algoritmo de Kruskal temos que verificar se o grafo obtido é acíclico. Tal pode ser feito etiquetando os vértices pelas componentes conexas em  $(V, F)$ . Inicializamos  $c : V \rightarrow \mathbb{N}$  com  $c(v_i) = i$  (cada vértice forma uma componente conexa de  $(V, \emptyset)$ ). No passo 1 sejam  $v_i$  e  $v_j$  os extremos da aresta  $e_k$ , se  $c(v_i) = c(v_j)$  então o grafo  $(V, F \cup \{e_k\})$  não é acíclico e tanto  $F$  como  $c$  mantêm-se inalterados, se  $c(v_i) \neq c(v_j)$  então  $(V, F \cup \{e_k\})$  é acíclico e redefinimos  $F := F \cup \{e_k\}$  e  $c(v) = c(v_i)$  sempre que  $c(v) = c(v_j)$ .

**Teorema 5.54.** Para qualquer grafo conexo com pesos nas arestas, o algoritmo de Kruskal termina produzindo uma árvore geradora de peso mínimo.

Dem. É claro que o algoritmo termina (há apenas um número finito de aresta a considerar) e que o output  $(V, F)$  é uma árvore geradora (pois é acíclico e  $|F| = n - 1$ ). Falta ver que tem peso mínimo.

Seja  $F = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_{m-1}}\}$  o output do algoritmo. Seja  $M$  uma árvore geradora de peso mínimo que partilhe com a árvore  $T = (V, F)$  o maior número possível de arestas.

Se  $T$  é uma árvore geradora minimal então  $M = T$ . Senão existe pelo menos uma aresta de  $T$  que não está em  $M$ , seja  $e_{i_k}$  a aresta nessa condição com menor índice.

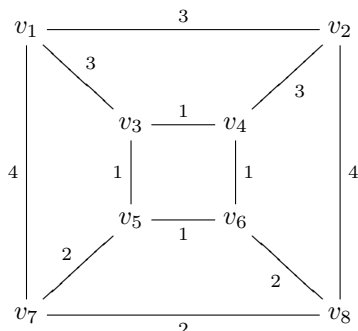
$M \cup \{e_{i_k}\}$  tem um ciclo e este ciclo contém uma aresta  $e$  que não está em  $T$  (caso contrário todo o ciclo estava contido em  $T$  o que é impossível pois  $T$  é acíclico). Temos então que  $(M \cup \{e_{i_k}\}) \setminus \{e\}$  é uma árvore.

Por  $M$  ser minimal  $w(e) \leq w(e_{i_k})$ .

Por outro lado, como  $e \notin T$ ,  $e$  estava disponível quando  $e_{i_k}$  foi escolhido, logo  $w(e) \geq w(e_{i_k})$ .

Portanto  $w(e) = w(e_{i_k})$  e  $M \cup \{e_{i_k}\} \setminus \{e\}$  é uma árvore geradora de peso mínimo com mais arestas em comum com  $T$  que  $M$  o que contradiz a definição de  $M$ . □

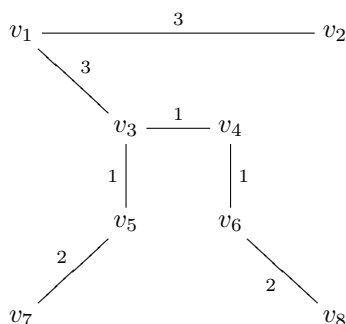
**Exemplo 5.55.** Considere-se o seguinte grafo



com os pesos das arestas representados sobre estas. Para aplicar o algoritmo de Kruskal podemos proceder do seguinte modo. Vamos contruindo uma tabela pondo na primeira coluna as arestas ordenadas por ordem crescente dos seus pesos, na segunda coluna colocamos os respectivos pesos. As seguintes colunas serão indexadas pelos vértices de  $G$  e por baixo destes colocamos as etiquetas provisórias das suas componentes conexas  $c(v_i)$ . Na última coluna colocamos sim ou não consoante a aresta que indexa a linha irá ser incluída ao não no conjunto  $F$ , tal acontecerá se e só se  $c(v_i) \neq c(v_j)$  (onde  $v_i$  e  $v_j$  são os vértices extremos da aresta em questão). Se a resposta for não então os  $c(v)$ 's permanecem inalterados na linha seguinte, se for sim então igualamos as etiquetas  $c(v_i)$  e  $c(v_j)$ . Quando as etiquetas foram todas iguais o algoritmo para.

aresta	peso	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$\in F?$
$[v_3, v_4]$	1	1	2	(3)	(4)	5	6	7	8	sim
$[v_3, v_5]$	1	1	2	(3)	3	(5)	6	7	8	sim
$[v_4, v_6]$	1	1	2	3	(3)	3	(6)	7	8	sim
$[v_5, v_6]$	1	1	2	3	3	(3)	(3)	7	8	não
$[v_5, v_7]$	2	1	2	3	3	(3)	3	(7)	8	sim
$[v_6, v_8]$	2	1	2	3	3	(3)	3	3	(8)	sim
$[v_7, v_8]$	2	1	2	3	3	3	3	(3)	(3)	não
$[v_1, v_2]$	3	(1)	(2)	3	3	3	3	3	3	sim
$[v_1, v_3]$	3	(1)	1	(3)	3	3	3	3	3	sim
$[v_2, v_4]$	3	1	1	1	1	1	1	1	1	Stop
$[v_1, v_7]$	4									
$[v_2, v_8]$	4									

A árvore gerada obtida será formada pelo conjunto de arestas  $F = \{[v_3, v_4], [v_3, v_5], [v_4, v_6], [v_5, v_7], [v_6, v_8], [v_1, v_2], [v_1, v_3]\}$



**Exercícios:**

**Exercício 5.56.** Demonstre a proposição 5.44.

**Exercício 5.57.** Demonstre o corolário 5.45.

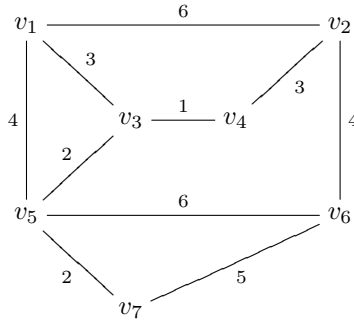
**Exercício 5.58.** Demonstre a proposição 5.46.

**Exercício 5.59.** Demonstre o corolário 5.47.

**Exercício 5.60.** Demonstre a proposição 5.48.

**Exercício 5.61.** Demonstre a proposição 5.49.

**Exercício 5.62.** Considere o seguinte grafo



com os pesos das arestas representados sobre estas. Use o algoritmo de Kruskal para determinar uma árvore geradora de peso mínimo. Represente a árvore obtida graficamente.

**Exercício 5.63.** Um governante de um pequeno reino medieval de cinco cidades tinha um serviço de mensageiros que podiam enviar uma mensagem de uma dada cidade para uma outra de acordo com a seguinte tabela de preços (em moedas de cobre):

	A	B	C	D	E
A		1	2		
B	1		2	3	
C	2	2		4	5
D		3	4		2
E			5	2	

Certo dia quis enviar uma mensagem da sua cidade de residência para as restantes quatro cidades a um preço mínimo (assume-se que em cada cidade haviam mensageiros em número suficiente para reenviarem a mensagem a quantas cidades fosse necessário).

- Formalize o problema como problema de árvore geradora mínima.
- Resolva o problema usando o algoritmo de Kruskal e responda qual o valor que o governante teve que pagar pelo envio da mensagem.

**Fluxos e cortes.** Recordemos que um *digrafo* ou *grafo orientado* ou *grafo dirigido* é um grafo onde as arestas têm uma orientação. Uma aresta orientada (também designada por *arco*)  $e$  é constituída por um par ordenado de vértices,  $e = (u, v)$ . Ao primeiro vértice,  $u$ , chamamos *vértice inicial* e ao segundo,  $v$ , chamamos *vértice final*. Para cada vértice  $v$  chamamos de *estrela de saída* ao conjunto, denotado por  $\delta^+(v)$ , das aresta orientadas com vértice inicial  $v$ , e chamamos de *estrela de entrada* ao conjunto, denotado por  $\delta^-(v)$ , das aresta orientadas com vértice final  $v$ .

**Definição 5.64.** Uma *rede* é um 4-tuplo  $\mathcal{N} = (V, E, d, b)$  onde

- $(V, E)$  é um digrafo;
- $d : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  é uma *função capacidade* onde  $d_e = d(e) \geq 0$  denota a capacidade da aresta  $e$ ;
- $b : V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma *função de fornecimento* onde  $b_v = b(v)$  denota o fornecimento no vértice  $v$ .

Podemos olhar para uma função  $x : E \rightarrow \mathbb{R}$  como sendo um vector de variáveis, uma por cada aresta,  $x = (x_e : e \in E) \in \mathbb{R}^E$ . Sempre que  $F \subseteq E$  denotamos  $x(F) := \sum_{e \in F} x_e$ .



**Definição 5.65.** Um *fluxo* numa rede  $\mathcal{N} = (V, E, d, b)$  é um vector  $x \in \mathbb{R}^E$  que satisfaz o seguinte sistema linear:

- (i)  $x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = b_v$  para todo o vértice  $v$ ;
- (ii)  $0 \leq x_e \leq d_e$  para toda a aresta  $e$ .

**Observação 5.66.** Se  $b_v = 0$  para qualquer vértice então o fluxo  $x$  é chamado de *circulação* e as equações  $x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = 0$  mais não são que a primeira lei de Kirchhoff para os circuitos eléctricos (o que entra é igual ao que sai).

**Definição 5.67.** Dado um grafo orientado  $D = (V, E)$  com ordem  $|V| = n$  e tamanho  $|E| = m \geq 1$  definimos a *matriz de incidência* como sendo uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n,m}$  em que as linhas são numeradas pelos vértices, as colunas são numeradas pelas arestas e a entrada genérica  $a_{i,j}$  da matriz é 1 se o vértice  $i$  for o vértice inicial da aresta  $j$ ,  $-1$  se for o vértice final e 0 nos restantes casos.

**Observação 5.68.** Um fluxo é uma solução do sistema linear

$$Ax = b, \quad 0 \leq x \leq d$$

onde  $A$  é a matriz de incidência do digrafo  $D = (V, E)$ ,  $b$  é o vector de fornecimento e  $d$  é o vector capacidade da rede  $\mathcal{N}$ . Assim sendo, o conjunto dos fluxos de uma rede forma um poliedro limitado  $\{x \in \mathbb{R}^E : Ax = b, 0 \leq x \leq d\}$ .

**Observação 5.69.** Se uma rede  $\mathcal{N} = (V, E, d, b)$  possui pelo menos um fluxo então  $\sum_{v \in V} b_v = 0$ .

**Definição 5.70.** Dados dois vértices distintos, uma *fonte*  $s$  (i.e.  $\delta^-(s) = \emptyset$ ) e um *poço*  $t$  (i.e.  $\delta^+(t) = \emptyset$ ), um fluxo  $x \in \mathbb{R}^E$  numa rede  $\mathcal{N} = (V, E, d, b)$  é chamado de *fluxo- $st$*  se  $b_v = 0$  para todo o vértice  $v$  distinto de  $s$  e  $t$ .

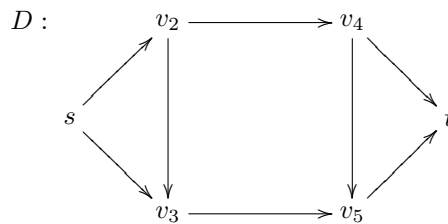
**Observação 5.71.** Da observação 5.69 resulta que, para um fluxo- $st$ , temos  $x(\delta^+(s)) = x(\delta^-(t))$ .

**Definição 5.72.** Ao valor  $f(x) = x(\delta^+(s))$  chamamos o *valor* do fluxo  $x$ .

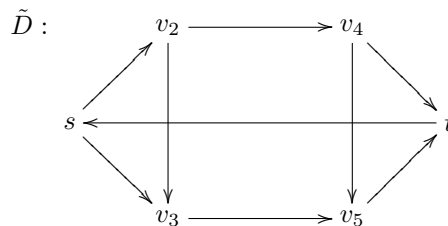
**Observação 5.73.** Num caso mais geral em que  $\delta^-(s) \neq \emptyset$  ou  $\delta^+(t) \neq \emptyset$ , chamamos valor do fluxo- $st$  a  $f(x) = x(\delta^+(s)) - x(\delta^-(s)) (= x(\delta^-(t)) - x(\delta^+(t)))$ .

**Definição 5.74.** Dado um digrafo  $D = (V, E)$  e dois vértices distintos  $s$  e  $t$  definimos o *grafo aumentado* como sendo  $\tilde{D} = (V, E \cup \{(t, s)\})$ . Ou seja, junta-se artificialmente uma aresta orientada  $(t, s)$  ligando o poço  $t$  à fonte  $s$ .

**Exemplo 5.75.** O grafo aumentado do digrafo



é o digrafo



**Observação 5.76.** Uma circulação em  $\tilde{D}$  corresponde a um fluxo- $st$  em  $D$  e vice-versa.

Dado um digrafo  $D = (V, E)$  seja  $\mathcal{P}$  o conjunto de todos os caminhos dirigidos<sup>8</sup> de  $D$ , e seja  $\mathcal{C}$  o conjunto de todos os ciclos dirigidos de  $D$ .

Se  $P \in \mathcal{P}$  é um caminho- $st$  então  $P$  dá origem a um fluxo- $st$  de valor  $z$  dado por  $x = z\chi^P$ , ou seja,

$$x(e) = \begin{cases} z & \text{se } e \in P \\ 0 & \text{se } e \notin P \end{cases}$$

de igual modo  $C \in \mathcal{C}$  induz uma circulação  $x = z\chi^C$ .

Consideremos a seguinte função (chamada de *função fluxo de caminho e ciclo*)  $g : \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+^9$ , chamamos  $g(P)$  o fluxo no caminho  $P$  e  $g(C)$  o fluxo no ciclo  $C$ .  $g$  pode ser vista como um vector em  $PC_+ := \mathbb{R}_+^{\mathcal{P} \cup \mathcal{C}}$ . Define-se a transformação linear  $T : PC_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^E$  dada por

$$T(g) = \sum_{P \in \mathcal{P}} g_P \chi^P + \sum_{C \in \mathcal{C}} g_C \chi^C$$

O próximo resultado (conhecido por **teorema da decomposição de fluxo**) mostra que qualquer fluxo é imagem desta aplicação.

**Teorema 5.77.** *Cada fluxo  $x \in \mathbb{R}^E$  num digrafo  $D = (V, E)$  pode ser decomposto como uma soma de fluxos de caminho e fluxos de ciclo, ou seja,  $x = T(g)$  para algum  $g \in PC_+$ .*

*De facto, definindo  $n := |\{v \in V : b_v > 0\}|$  e  $m := |\{e \in E : x_e > 0\}|$ ,  $g$  pode ser escolhido de forma a que*

- (i) *se  $g_P > 0$  para um dado caminho  $P$  então este vai de um vértice  $v$  fornecedor ( $b_v > 0$ ) para um vértice  $u$  de procura ( $b_u < 0$ );*
- (ii) *no máximo  $n + m$  caminhos e ciclos têm fluxo não-nulo;*
- (iii) *no máximo  $m$  ciclos têm fluxo não-nulo.*

*Dem.* Vamos mostrar a veracidade do teorema por indução em  $n + m$ . Para  $n + m = 0$  o resultado é trivial,  $x = 0$ .

Seja  $x$  um fluxo com  $n + m > 0$ . Se  $n = 0$  temos, pela observação 5.69, que  $b_v = 0 \forall v \in V$  logo  $x$  é uma circulação. Nesse caso, existe um ciclo  $C$  onde todas as arestas têm fluxo positivo (i.e.  $x_e > 0 \forall e \in C$ ), basta pegar numa aresta com fluxo não-nulo (existe pois  $m > 0$ ) e continuando o percurso, saindo em cada vértice que se entra por uma aresta com fluxo positivo<sup>10</sup>, até este se fechar. Seja  $\varepsilon = \min\{x_e : e \in C\}$ , temos então que  $x = \varepsilon\chi^C + x'$  onde  $x'$  é um fluxo com pelo menos uma aresta com fluxo positivo ( $m(x') \leq m - 1$ ), logo podemos usar a hipótese de indução para concluir a tese do teorema.

Se  $n > 0$  então vamos construindo um percurso  $H$  começando num vértice de fornecimento  $s$ , prologando por uma aresta com fluxo positivo que saia do último que se entrou até que este percurso feche sobre si próprio ou que acabe num vértice  $t$  de onde não pode sair (caso em que  $x(\delta^+(t)) = 0$  pelo que  $t$  será necessariamente um vértice de procura). Se o percurso  $H$  fechar sobre si próprio temos um ciclo  $C$  como anteriormente e procedemos do mesmo modo. No outro caso temos que  $H$  é caminho- $st$  na condição (i) do teorema. Seja  $\varepsilon = \min(\{x_e : e \in H\} \cup \{b_s\})$ , temos então que  $x = \varepsilon\chi^H + x'$  onde  $x'$  é um fluxo para o vector de fornecimento  $b'$  (com  $b'_s = b_s - \varepsilon$ ,  $b'_t = b_t + \varepsilon$  e  $b'_v = b_v$  para os restantes vértices) com pelo menos uma aresta com fluxo positivo ( $m(x') \leq m - 1$ , caso em que  $\varepsilon = \min\{x_e : e \in H\}$ ) ou com menos um vértice de fornecimento ( $n(x') = n - 1$ , caso em que  $\varepsilon = b_s$ <sup>11</sup>) logo podemos também usar a hipótese de indução para concluir a tese do teorema.  $\square$

**Corolário 5.78.** *Uma circulação num digrafo  $D = (V, E)$  pode ser decomposta na soma de um número máximo de  $|E|$  ciclos dirigidos.*

<sup>8</sup>Um percurso (caminho, circuito, ciclo) num digrafo é um percurso (caminho, circuito, ciclo) *dirigido* ou *orientado* se cada uma das suas arestas orientadas for precedida pelo seu vértice inicial e sucedida pelo seu vértice final na sequência que define o percurso.

<sup>9</sup>Usamos aqui  $\mathbb{R}_+$  como notação para  $\mathbb{R}_0^+$  ou  $[0, +\infty)$ .

<sup>10</sup>Existe pois se há uma aresta a entrar com fluxo positivo tem de existir uma aresta a sair com fluxo positivo para que o fornecimento seja nulo,  $b_v = 0$ .

<sup>11</sup>Neste caso temos que  $b'_s = 0$  e  $b'_t \leq 0$  pois  $b_t = -x(\delta^-(t)) \leq -\varepsilon$ .

**Definição 5.79.** Um *corte* num digrafo  $D = (V, E)$  é um conjunto de arcos da forma  $\delta^+(S) := \{(v, w) \in E : v \in S \text{ e } w \notin S\}$  para um subconjunto próprio de  $V$  (i.e.  $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$ ). Se  $S$  for tal que  $s \in S$  e  $t \notin S$  dizemos que o corte  $\delta^+(S)$  é um *corte-st*. A *capacidade* de um corte  $C = \delta^+(S)$  é o valor  $d(C) = \sum_{e \in C} d_e$  onde  $d$  é a função capacidade da rede.

**Lema 5.80.** O valor de um qualquer fluxo-st não é maior que a capacidade de um qualquer corte-st.

*Dem.* Seja  $x$  um fluxo-st com valor  $f(x) = x(\delta^+(s))$  e  $C = \delta^+(S)$  um corte-st. Como, para todo  $v \in S \setminus \{s\}$ ,  $x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = 0$ , temos que

$$f(x) = \sum_{v \in S} x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v))$$

por outro lado

$$\sum_{v \in S} x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = \sum_{e \in \delta^+(S)} x_e - \sum_{e \in \delta^-(S)} x_e = x(\delta^+(S)) - x(\delta^-(S)) \leq x(\delta^+(S)) \leq d(\delta^+(S))$$

Concluimos portanto que o valor  $f(x)$  do fluxo  $x$  não é maior que a capacidade  $d(C)$  do corte  $C$ .  $\square$

**Definição 5.81.** O *problema do fluxo máximo* consiste em, dado um digrafo com vértices distintos<sup>12</sup>  $s$  e  $t$ , determinar um fluxo-st,  $x \in \mathbb{R}^E$ , com valor  $f(x) = x(\delta^+(s))$  o maior possível.

**Observação 5.82.** Existe, para qualquer digrafo com vértices distintos  $s$  e  $t$ , um fluxo-st com valor máximo pois a função valor  $f(x) = \sum_{e \in \delta^+(s)} x_e$  é uma função contínua no conjunto dos fluxos-st,  $\{x \in \mathbb{R}^E : x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = 0 \forall v \in V \setminus \{s, t\}, 0 \leq x_e \leq d_e \forall e \in E\}$ , que é um conjunto compacto (mais concretamente é um poliedro limitado).

**Definição 5.83.** O *problema do corte mínimo* consiste em, dado um digrafo com vértices distintos  $s$  e  $t$ , determinar um corte-st,  $C = \delta^+(S)$ , com capacidade  $d(C) = d(\delta^+(S))$  a menor possível.

**Proposição 5.84.** O valor máximo dos fluxo-st nunca é maior que a capacidade mínima dos corte-st.

*Dem.* Exercício.  $\square$

Dado um fluxo-st,  $x$ , num digrafo  $D = (V, E)$  e um vértice  $v \in V \setminus \{s\}$ , considere-se  $P$  um caminho- $sv$  não necessariamente dirigido em  $D$ . Há em  $P$  dois tipos de arcos, aqueles que estão orientados no sentido  $sv$ , designados por *arcos de avanço*, e aqueles que estão orientados no sentido  $vs$ , designados por *arcos de recuo*.

**Definição 5.85.** Seja  $P^+$  e  $P^-$  os conjuntos dos arcos de avanço e dos arcos de recuo respectivamente. Dizemos que um tal caminho- $sv$ ,  $P$ , é um *caminho  $x$ -aumentador* a  $v$  (ou *caminho- $sv$  de aumento de fluxo*) se  $x_e < d_e$  para todo  $e \in P^+$  e  $x_e > 0$  para todo  $e \in P^-$ . Se  $v = t$ , então  $P$  chama-se um *caminho  $x$ -aumentador*.

**Lema 5.86.** Um fluxo-st,  $x$ , é máximo se e só se não existem caminhos  $x$ -aumentadores.

*Dem.* Seja  $S(x) = \{v \in V : \text{existem caminhos } x\text{-aumentadores a } v\}$ .

Se existem caminhos  $x$ -aumentadores então  $t \notin S(x)$ . Seja  $P$  um caminho  $x$ -aumentadores e sejam  $\varepsilon^+ = \min\{d_e - x_e : e \in P^+\} > 0$ ,  $\varepsilon^- = \min\{x_e : e \in P^-\} > 0$  e  $\varepsilon = \min\{\varepsilon^+, \varepsilon^-\} > 0$ , então

$$\bar{x}_e = \begin{cases} x_e + \varepsilon & \text{se } e \in P^+ \\ x_e - \varepsilon & \text{se } e \in P^- \\ x_e & \text{se } e \notin P \end{cases}$$

é um fluxo-st com  $f(\bar{x}) = f(x) + \varepsilon > f(x)$ , logo  $x$  não é um fluxo máximo.

Se não existem caminhos  $x$ -aumentadores então  $t \notin S(x)$ . Temos então que  $C(x) = \delta^+(S(x))$  é um corte-st. Para qualquer arco  $e = (i, j) \in C(x)$  temos  $x_e = d_e$  (senão  $j \in S(x)$  e  $e \notin C(x)$ ). Do

<sup>12</sup>Geralmente  $s$  é uma fonte e  $t$  um poço.

mesmo modo para qualquer arco  $e \in \delta^-(S(x)) = \{(i, j) : i \notin S(x) \text{ e } j \in S(x)\}$  temos  $x_e = 0$ . O valor do fluxo  $x$  é

$$f(x) = \sum_{v \in S(x)} x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = x(\delta^+(S(x))) - x(\delta^-(S(x))) = d(\delta^+(S(x))) - 0 = d(C(x))$$

logo, pela proposição 5.84,  $x$  é um fluxo máximo.  $\square$

Note-se que na demonstração do lema anterior é provada a existência de um corte- $st$  com capacidade igual ao fluxo máximo. Assim juntamente com a proposição 5.84 temos demonstrado o seguinte resultado, conhecido por **teorema fluxo máximo corte mínimo**.

**Teorema 5.87.** *Para cada digrafo com função capacidade nos arcos e vértices distintos  $s$  e  $t$ , o valor de fluxo- $st$  máximo é igual à capacidade de corte- $st$  mínima.*

O próximo teorema, conhecido por **teorema de Menger**, é consequência deste dois últimos resultados.

**Teorema 5.88.** *O número máximo de caminhos- $st$  dirigidos disjuntos nos arcos num digrafo é igual ao número mínimo de arcos num corte- $st$ .*

*Dem.* Seja  $k$  o número mínimo de arcos num corte- $st$  e  $l$  o número máximo de caminhos- $st$  dirigidos disjuntos nos arcos. Tomamos por função capacidade a função constante igual a 1 (i.e.  $d_e = 1 \forall e \in E$ ).

Temos então que  $k$  é a capacidade mínima de um corte- $st$ .

Sejam  $P_1, \dots, P_l$ ,  $l$  caminhos- $st$  dirigidos disjuntos nos arcos. Consideremos o fluxo  $x = \sum_{i=1}^l \chi^{P_i}$ . Tal fluxo tem valor  $f(x) = l$ , logo  $l \leq k$ . Por outro lado tomando um fluxo- $st$ ,  $x$ , de valor máximo, temos pelo teorema 5.77, que  $x$  é uma soma de fluxos constantes em caminhos- $st$  dirigidos e ciclos dirigidos (i.e.  $x = \alpha_1 \chi^{P_1} + \dots + \alpha_n \chi^{P_n} + \beta_1 \chi^{C_1} + \dots + \beta_m \chi^{C_m}$ ). Tomando só a parte  $x' = \alpha_1 \chi^{P_1} + \dots + \alpha_n \chi^{P_n}$  temos um fluxo de igual valor (logo máximo). Embora estes caminhos possam não ser disjuntos dois a dois nas arestas é possível redirecionar o fluxo nas arestas de modo a obtermos um fluxo máximo  $x''$  que é soma de fluxos constantes em caminhos- $st$  dirigidos disjuntos dois a dois nas arestas:  $x'' = \gamma_1 \chi^{P_1} + \dots + \gamma_j \chi^{P_j}$  (exercício). Como  $x''$  é fluxo máximo temos que  $k = f(x'') = \gamma_1 + \dots + \gamma_j \leq j \leq l$ .  $\square$

O próximo algoritmo (Ford-Fulkerson) mostra como obter um fluxo- $st$  maximal.

#### Algoritmo genérico do fluxo maximo:

Passo 0 Inicializa-se com  $x := 0$ .

Passo 1 Determina-se o conjunto  $S(x)$  (i.e. o conjunto dos vértices para os quais existem caminhos  $x$ -aumentadores). Se  $t \notin S(x)$ , termina-se: o fluxo  $x$  é máximo e o corte  $\delta^+(S(x))$  é mínimo. Senão tomamos um caminho  $P$   $x$ -aumentador.

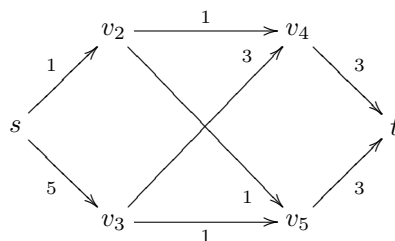
Passo 2 Redefine-se  $x$ , somando  $\varepsilon$  nos arcos de avanço de  $P$  e subtraindo  $\varepsilon$  nos arcos de recuo de  $P$ , onde  $\varepsilon = \min(\{d_e - x_e : e \in P^+\} \cup \{x_e : e \in P^-\})$ . Retorna-se ao passo 1.

**Observação 5.89.** Se a função capacidade contiver valores irracionais não é líquido que o algoritmo termina (existem exemplos em que é possível escolher os caminhos  $x$ -aumentadores de modo cíclico sem o fluxo resultante se aproxime do fluxo máximo). No entanto o próximo resultado garante que tal acontece se as capacidades dos arcos forem todas racionais.

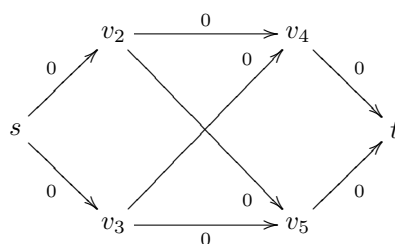
**Proposição 5.90.** *Sempre que a função capacidade  $d$  tiver apenas valores inteiros (racionais) o algoritmo termina em tempo finito com um fluxo com valores inteiros (racionais).*

*Dem.* Exercício.  $\square$

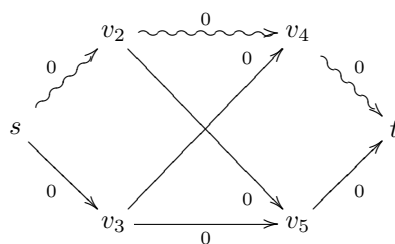
**Exemplo 5.91.** Consideremos o problema do fluxo- $st$  máximo no seguinte digrafo (com as capacidades das arestas indicadas sobre estas):



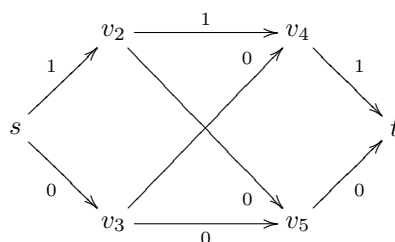
Iniciamos com o fluxo nulo:



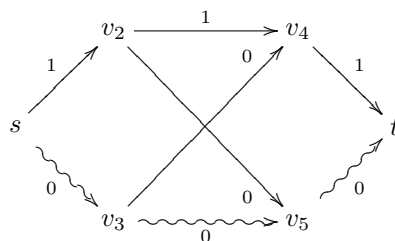
Determinamos o  $S(x)$ , que neste caso é formado por todos os vértices incluindo  $t$ . Logo existe um caminho  $x$ -aumentador, por exemplo:



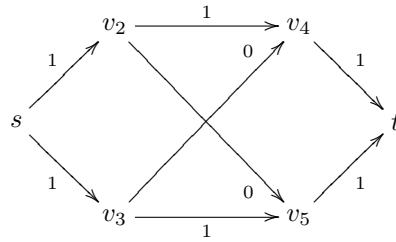
Temos que  $\varepsilon = \min\{1, 1, 3\} = 1$ , logo ficamos com o novo fluxo:



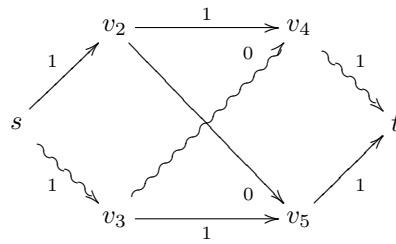
$S(x) = \{s, v_2, v_3, v_4, v_5, t\}$ , tomamos novamente um caminho  $x$ -aumentador, por exemplo:



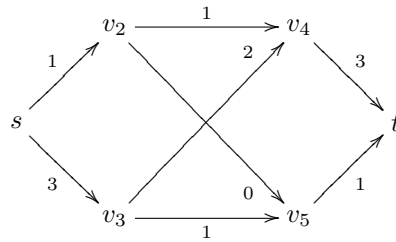
Temos que  $\varepsilon = \min\{5, 1, 3\} = 1$ , logo ficamos com o novo fluxo:



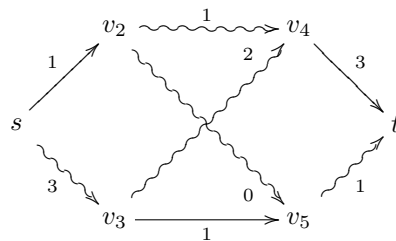
$S(x) = \{s, v_2, v_3, v_4, v_5, t\}$ , tomamos novamente um caminho  $x$ -aumentador, por exemplo:



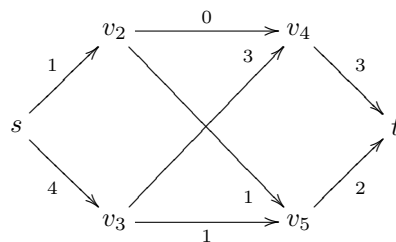
Temos que  $\varepsilon = \min\{5 - 1, 3, 3 - 1\} = 2$ , logo ficamos com o novo fluxo:



$S(x) = \{s, v_2, v_3, v_4, v_5, t\}$ , tomamos novamente um caminho  $x$ -aumentador, por exemplo:



Temos que  $\varepsilon = \min\{5 - 3, 3 - 2, 1, 1, 3 - 1\} = 1$ , logo ficamos com o novo fluxo:



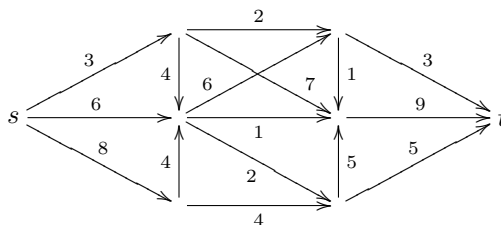
$S(x) = \{s, v_2\} \not\cong t$ , logo este fluxo- $st$  é máximo e  $C = \delta^+(S(x)) = \{(s, v_2), (v_3, v_4), (v_3, v_5)\}$  é corte- $st$  mínimo. Confirma-se, de facto, que  $f(x) = 1 + 4 = d(C) = 1 + 3 + 1$ .

**Exercícios:**

**Exercício 5.92.** Demonstre a proposição 5.84.

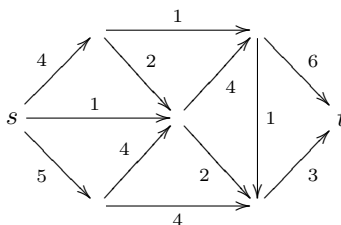
**Exercício 5.93.** Demonstre a proposição 5.90.

**Exercício 5.94.** Determine, com o auxílio do algoritmo genérico do fluxo máximo, um fluxo- $st$  com valor máximo e um corte- $st$  de capacidade mínima do seguinte grafo dirigido:



Os números que aparecem sobre as arestas indicam as capacidades destas.

**Exercício 5.95.** Determine, com o auxílio do algoritmo genérico do fluxo máximo, um fluxo- $st$  com valor máximo e um corte- $st$  de capacidade mínima do seguinte grafo dirigido:



Os números que aparecem sobre as arestas indicam as capacidades destas.

**Exercício 5.96.** Para uma agência de modelos candidataram-se três louras de olhos azuis, duas louras de olhos castanhos, três ruivas de olhos azuis, uma ruiva de olhos castanhos, duas morenas de olhos azuis e sete morenas de olhos castanhos. Pretende-se determinar o número máximo de modelos que podem ser contratadas sabendo que a agência não está interessada em contratar mais de seis modelos por cada cor de cabelo nem mais de nove por cada cor de olhos. Formalize o problema como um problema de fluxo máximo e resolva-o usando o algoritmo genérico do fluxo máximo.

**Exercício 5.97.** Diga, justificando, se na aplicação do algoritmo genérico do fluxo máximo é possível escolher cada caminhos- $st$  criteriosamente de modo a estes sejam sempre dirigidos (i.e. sem arcos de recuo).

**Exercício 5.98.** Mostre, com um contra-exemplo, que a seguinte afirmação é falsa:

A cada iteração do algoritmo genérico do fluxo máximo o número de caminhos  $x$ -aumentadores nunca aumenta.

**Fluxo de rede de custo mínimo.**

**Definição 5.99.** Chama-se *problema do fluxo de rede de custo mínimo* ao problema de determinar de entre os fluxos viáveis,  $x \in \{x \in \mathbb{R}^E : Ax = b, 0 \leq x \leq d\}$ , de uma dada rede  $\mathcal{N} = (V, E, d, b)$  um que tenha  $c^T x = \sum_{e \in E} c_e x_e$  mínimo.

**Observação 5.100.** Trata-se de um caso particular de programação linear:

$$\min\{c^T x : Ax = b, 0 \leq x \leq d\}$$

onde  $A$  é a matriz de incidência do digrafo  $(V, E)$ ,  $b$  e  $d$  são os vectores de fornecimento e capacidade da rede respectivamente.

**Exemplo 5.101.** Um problema típico de fluxo de rede de custo mínimo é o de calcular o custo mínimo do transporte de uma determinada mercadoria desde das suas fontes de origem (por exemplo fábricas) até aos locais de consumo.

**Exemplo 5.102.** O problema de fluxo- $st$  máximo num digrafo  $D = (V, E)$  pode ser resolvido como um problema de fluxo de rede de custo mínimo no digrafo aumentado  $\tilde{D} = (V, E \cup \{(t, s)\})$ . Basta tomar para vector de custo  $c = -\chi^{\{(t,s)\}}$ , ou seja,  $c_{(t,s)} = -1$  e  $c_e = 0$  para qualquer  $e \in E$ .

Vamos considerar para o que se segue que o digrafo da rede  $D = (V, E)$  é conexo (quando visto como um grafo não-orientado).

**Proposição 5.103.** *Seja  $A$  a matriz de incidência do digrafo  $D = (V, E)$  então a característica de  $A$  é  $n - 1$  (onde  $n = |V|$ ). Além disso, se  $\tilde{A}$  é a matriz obtida a partir de  $A$  eliminando uma linha (não interessa qual) então as linhas de  $\tilde{A}$  são linearmente independentes.*

*Dem.* Como a soma das linhas de  $A$  dá o vector nulo (pelo modo como a matriz de incidência para digrafos é definida) é óbvio que as linhas de  $A$  são linearmente dependentes logo  $\text{car}(A) \leq n - 1$ .

Tomamos a matriz  $\tilde{A}$  obtida da matriz  $A$  pela remoção de uma linha (vamos designar por  $i_0$  o vértice correspondente à linha removida) e tomamos uma árvore geradora<sup>13</sup>  $T = (V, F)$  de  $D$ . Em seguida vamos reordenar os restantes vértices,  $i_1, \dots, i_{n-1}$ , e as aresta,  $e_1, \dots, e_m$ , de modo que:

- (i)  $F = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  (i.e. as primeiras arestas são as que formam a árvore geradora  $T$ );
- (ii)  $i_k \neq i_0$  é uma folha (i.e. tem grau 1) na árvore obtida de  $T$  removendo os vértices  $i_1, \dots, i_{k-1}$ , ou seja,  $T[V \setminus \{i_1, \dots, i_{k-1}\}]$ ;
- (iii)  $e_k$  é a única aresta incidente a  $i_k$  em  $T[V \setminus \{i_1, \dots, i_{k-1}\}]$ .

Temos que a matriz  $\tilde{A}$  fica da forma

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ * & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ * & * & \pm 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & \pm 1 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

Portanto temos que  $\tilde{A}$  tem característica  $n - 1$  e como tal  $A$  também tem característica  $n - 1$ .  $\square$

A demonstração anterior mostra-nos que a uma árvore geradora corresponde uma base de  $\tilde{A}$ . O próximo resultado diz-nos que essa correspondência é biunívoca.

**Proposição 5.104.** *Escolhe-se um vértice  $i_0 \in V$  (chamado vértice de raiz), e seja  $\tilde{A}$  a matriz obtida a partir de  $A$  após a remoção da linha correspondente a  $i_0$ . Então existe uma correspondência biunívoca entre as árvores geradoras de  $D$  e as bases em  $\tilde{A}$  (i.e. submatrizes não-singulares de dimensão  $(n - 1) \times (n - 1)$ ).*

*Dem.* Seja  $F \subseteq E$  um conjunto de aresta de  $D$  e  $\tilde{A}_F$  a submatriz de  $\tilde{A}$  que formadas pelas arestas em  $F$ . Vimos na demonstração da proposição anterior que se  $(V, F)$  é uma árvore então  $\tilde{A}_F$  é não-singular (i.e. é uma base de  $\tilde{A}$ ). Vejamos agora que se  $\tilde{A}_F$  é não-singular então  $(V, F)$  é acíclico (logo é uma árvore pois para  $\tilde{A}_F$  ser quadrada temos que ter  $|F| = n - 1$ ). Suponhamos que  $(V, F)$  tinha um ciclo  $e_1, e_2, \dots, e_k$ . Escolhida uma orientação para o ciclo definimos

$$\lambda_i = \begin{cases} 1 & \text{se as orientações do ciclo e do arco } e_i \text{ coincidem} \\ -1 & \text{se as orientações do ciclo e do arco } e_i \text{ são opostas} \end{cases}$$

Temos que se  $j_1, \dots, j_k$  forem as colunas de  $A$  associadas aos arcos  $e_1, \dots, e_k$  então  $\sum_{i=1}^k \lambda_i j_i = 0$  logo  $\tilde{A}_F$  não seria não-singular.  $\square$

Consideremos agora o problema de fluxo de rede de custo mínimo. Para simplificar vamos restringir-nos ao caso em que as capacidades são ilimitadas<sup>14</sup>.

<sup>13</sup>Existe pois estamos a assumir que  $D$  é conexo.

<sup>14</sup>O caso em que as capacidades são limitadas pode-se transformar no caso em que as capacidades são ilimitadas juntando mais vértices e arestas, mais concretamente inserindo vértices no meio das arestas com fornecimentos iguais às capacidades das arestas onde foram inseridos (exercício).



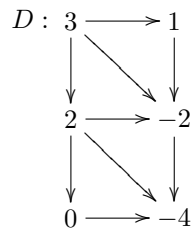
$$\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

Embora este problema possa ser resolvido usando algoritmo simplex, o facto de  $A$  ser uma matriz de incidência de um digrafo permite fazer uso das proposições anteriores para obter um algoritmo mais simples.

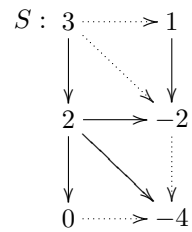
Primeiro escolhemos um vértice raíz  $i_0$  e eliminamos a correspondente linha à matriz  $A$ . Ficamos com um problema equivalente:

$$\min\{c^T x : \tilde{A}x = \tilde{b}, x \geq 0\}$$

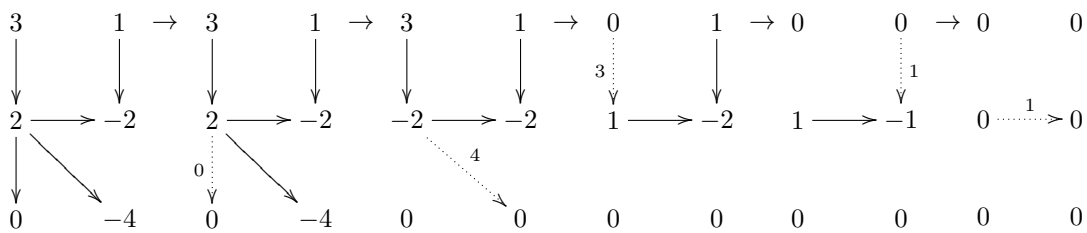
Como vimos as bases de  $\tilde{A}$  correspondem às árvores geradoras de  $D = (V, E)$ . Além disso, dada uma árvore geradora  $S$ , a solução básica  $x^S$  associada à base  $\tilde{A}_S$  pode ser calculada folha a folha. Por exemplo, se no seguinte digrafo



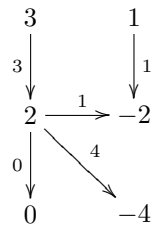
com os fornecimentos indicados no lugar dos vértices, tomarmos a árvore geradora



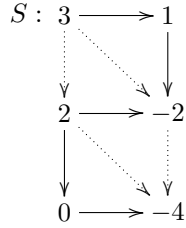
podemos calcular a fluxo associado do seguinte modo. Procuremos um vértice  $v$  de grau 1, se o seu único arco incidente for de entrada então atribuímos a esse arco o fluxo  $-b_v$  (i.e. o simétrico do fornecimento do vértice  $v$ ) e se o arco for de saída então atribuímos o fluxo  $b_v$ . Em seguida removemos esse arco e alteramos os fornecimentos nos seus vértices inicial (subtraindo pelo valor do fluxo do arco) e final (somando pelo valor do fluxo do arco).



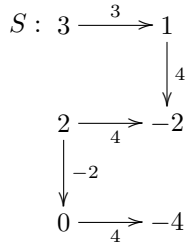
No final ficamos com



Note-se que a solução básica  $x^S$  obtida pode ser ou não viável. Por exemplo, se tomássemos a árvore geradora



obteríamos (exercício) a seguinte solução não viável:



A solução básica dual  $y^S = c_S^T \tilde{A}_S^{-1}$  é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases}
 y_i - y_j = c_{ij} \text{ se } (i, j) \in S \\
 y_{i_0} = 0
 \end{cases}$$

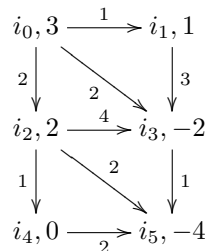
Segue-se então o algoritmo simplex para redes.

**Algoritmo Simplex para Redes:**

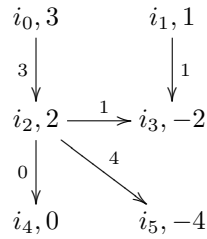
- Passo 0 Seja  $x^S$  uma solução básica viável correspondente a uma árvore geradora  $S$ .
- Passo 1 Calcula-se as variáveis duais  $y_i^S$ ,  $i \in V$  resolvendo as equações  $y_i^S - y_j^S = c_{ij}$  para cada  $(i, j) \in S$  (usando  $y_{i_0} = 0$ ). O custo reduzido para as variáveis não-básicas  $x_{ij}$ ,  $(i, j) \notin S$  é então  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (y_i^S - y_j^S)$ .
- Passo 2 Se  $\bar{c}_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \notin S$  então termina-se, a solução corrente é optimal. Senão faz-se o passo 3.
- Passo 3 Escolhe-se um arco não-básico  $(i, j) \notin S$  com  $\bar{c}_{ij} < 0$ . Seja  $C$  o único ciclo de  $S \cup \{(i, j)\}$ . Reajusta-se o fluxo no ciclo  $C$  aumentando o fluxo no arco  $(i, j)$  o máximo possível, até um outro arco  $e \in C \setminus \{(i, j)\}$  ficar com fluxo zero ( $x_e = 0$ ). Então muda-se a base (árvore geradora)  $S$  para  $(S \cup \{(i, j)\}) \setminus \{e\}$  e volta-se ao passo 1.

**Observação 5.105.** Pode dar-se o caso de no passo 3 o fluxo poder ser aumentado até infinito se o ciclo  $C$  for orientado. Este caso, em o problema é ilimitado, só acontece se existir um ciclo orientado no digrafo com custo negativo (exercício).

**Exemplo 5.106.** Consideremos a seguinte rede, com os fornecimentos indicados ao lado dos vértices e os custos de cada aresta indicados sobre estas:



Tomemos a solução básica associada à árvore geradora  $S$ :



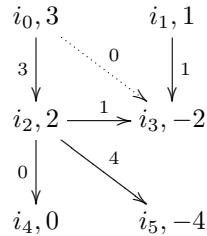
Calculando as variáveis duais  $y_i^S, i \in V$ , através das equações  $y_i^S - y_j^S = c_{ij}, (i, j) \in S, y_{i_0} = 0$ , obtemos<sup>15</sup>:

$$(y_{i_0}, y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}, y_{i_4}, y_{i_5}) = (0, -3, -2, -6, -3, -4)$$

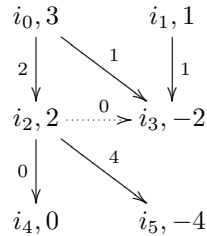
Os custos reduzidos  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (y_i^S - y_j^S)$  das arestas não-básicas,  $(i, j) \notin S$ , são:

$$\bar{c}_{01} = -2 < 0, \bar{c}_{03} = -4 < 0, \bar{c}_{35} = 3 \geq 0, \bar{c}_{45} = 1 \geq 0$$

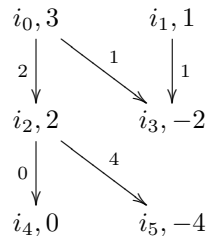
Escolhemos então uma variável não-básica  $x_{ij}$  com  $\bar{c}_{ij} < 0$ , por exemplo  $x_{03}$ . Aumentemos o fluxo no único ciclo do digrafo  $S \cup (i_0, i_3)$



de modo a que o fluxo em  $(i_0, i_3)$  seja tão grande quanto possível (o que acontece quando o fluxo se anula num outro arco do ciclo)



Remove-se então esse arco<sup>16</sup> obtendo uma nova solução básica:



As variáveis duais são

$$(y_{i_0}, y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}, y_{i_4}, y_{i_5}) = (0, 1, -2, -2, -3, -4)$$

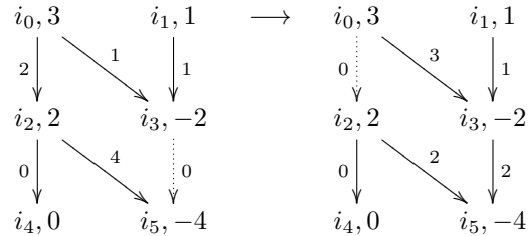
<sup>15</sup>Um modo fácil de calcular  $y_i$  é tomar o único caminho- $i, i_0$  e ir somando ou subtraindo os custos dos arcos conforme estes sejam de avanço ou de recuo.

<sup>16</sup>Na verdade pode haver mais de um arco a ficar com fluxo zero, em todo o caso remove-se apenas um que esteja nessas condições.

e os custos reduzidos são

$$\bar{c}_{01} = 2 \geq 0, \bar{c}_{23} = 4 \geq 0, \bar{c}_{35} = -1 < 0, \bar{c}_{45} = 1 \geq 0$$

Repete-se o processo, agora com a variável  $x_{35}$ ,



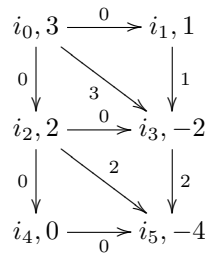
Temos agora que as variáveis duais são

$$(y_{i_0}, y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_3}, y_{i_4}, y_{i_5}) = (0, 1, -1, -2, -2, -3)$$

e os custos reduzidos são

$$\bar{c}_{01} = 2 \geq 0, \bar{c}_{02} = 1 \geq 0, \bar{c}_{23} = 3 \geq 0, \bar{c}_{45} = 1 \geq 0$$

Temos verificada a condição optimal, o algoritmo termina com a solução de custo mínimo:



**Observação 5.107.** Tal como no caso algoritmo Simplex para poliedros, no algoritmo Simplex para redes também precisamos de iniciar com uma solução básica viável. Se não nos for dada uma solução básica viável podemos construir uma usando o seguinte procedimento, juntamos ao digrafo mais um vértice com fornecimento nulo e ligamos este vértice a cada um dos restantes vértices através de um arco que será de saída se ligar a vértice de procura e será de entrada se ligar a um vértice de fornecimento. Consideremos os custos neste arcos introduzidos como sendo um e nos restantes arcos como sendo zero. Temos um novo problema de fluxo de rede de custo mínimo que pode ser resolvido pelo algoritmo simplex iniciando com a solução básica viável associada à árvore geradora formada pelos arcos incidentes ao vértice introduzido. A solução optimal obtida será um solução básica viável do problema original (caso tal exista).

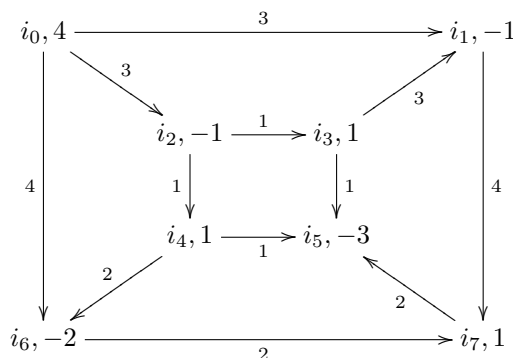
### Exercícios:

**Exercício 5.108.** Demonstre o que é afirmado na observação 5.105, se não existir ciclos orientados com custo negativo o problema de fluxo de rede de custo mínimo é limitado.

**Exercício 5.109.** Uma dada empresa possui três lojas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , onde vendem um dado produto à razão de 30, 50 e 20 unidades por dia respectivamente, e conta com três fornecedores  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  que fornecem por dia 60, 20 e 20 unidades respectivamente. O fornecedor  $F_1$  fornece as lojas  $L_1$  e  $L_2$  com um custo de 2 euros e 3 euros por unidade respectivamente, o fornecedor  $F_2$  fornece as lojas  $L_1$  e  $L_3$  com um custo de 2 euros e 3 euros por unidade respectivamente e o fornecedor  $F_3$  fornece a loja  $L_1$  com um custo de 1 euro por unidade. Por sua vez a loja  $L_1$  pode fazer transvases para as outras lojas com um custo de 2 euros por unidade. Assume-se que não há limite capacidade máxima de transporte. A tradição na empresa tem sido transportar toda a mercadoria dos fornecedores directamente para a loja  $L_1$  e daí distribuir para as restantes lojas, no entanto a nova gerência pretende encontrar um plano de transporte de mercadoria que satisfaça as necessidades com um custo mínimo.

- (a) Formalize o problema como problema de fluxo de rede de custo mínimo.  
 (b) Resolva o problema usando o método do simplex para redes partindo da solução que a empresa tem vindo a usar.

**Exercício 5.110.** Determine, usando o algoritmo simplex para redes, o fluxo de menor custo na seguinte rede:



com os fornecimentos indicados ao lado dos vértices e os custos de cada aresta indicados sobre estas. Inicialize com árvore geradora cujo conjunto de arestas é  $F = \{[i_0, i_1], [i_0, i_2], [i_2, i_3], [i_2, i_4], [i_3, i_5], [i_4, i_6], [i_5, i_7]\}$ .

**Exercício 5.111.** Diga, justificando, como é que se pode transformar um problema de fluxo de rede de custo mínimo com capacidades limitadas num problema de fluxo de rede de custo mínimo com capacidades ilimitadas. (Sugestão: decomponha cada arco  $e : v \rightarrow v'$  em três  $v \rightarrow u \leftarrow u' \rightarrow v'$  dando os fornecimentos  $b_u = -b_{u'} = -d_e$  aos novos vértices  $u$  e  $u'$  e custos apropriados nos novos arcos).

**Exercício 5.112.** Uma cooperativa agrícola possui três quintas de exploração  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  que produzem 300, 200 e 100 litros de leite por dia respectivamente. Inicialmente a cooperativa recorria a um só centro de embalagem  $C_1$  que empacotava o leite a um preço de 8 cêntimos o litro. Entretanto surgiu a oportunidade de recorrer a um segundo centro de embalagem  $C_2$  que empacota o leite a um preço de 6 cêntimos o litro.

O problema que se coloca é o de redistribuir a produção de leite pelos dos centros de embalagem  $C_1$  e  $C_2$  de modo a minimizar o custo total de produção, sabendo que os custos de transporte do leite das quintas para os centros são dados (em cêntimos por litro) pela seguinte tabela:

	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$
$C_1$	2	2	3
$C_2$	5	3	2

- (a) Formalize o problema como problema de programação linear e resolva-o usando o método do Simplex, tomando como solução básica inicial a distribuição original (toda a produção de leite para  $C_1$ ).  
 (b) Formalize o problema como problema de fluxo de rede de custo mínimo e resolva-o usando o método do Simplex para redes, tomando como solução básica inicial a distribuição original (toda a produção de leite para  $C_1$ ).

### Matchings, cocliques e coberturas.

**Definição 5.113.** Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Uma *coclique* ou *conjunto independente de vértices* é um subconjunto  $C$  de  $V$  tal que não existe nenhuma aresta  $e \in E$  a ligar dois vértices de  $C$  (i.e.  $e = [v, w] \in E \Rightarrow v \notin C$  ou  $w \notin C$ ).

Uma *cobertura de vértices* é um subconjunto  $W$  de  $V$  tal que qualquer aresta  $e \in E$  é incidente a pelo menos um vértice de  $W$  (i.e.  $e = [v, w] \in E \Rightarrow v \in W$  ou  $w \in W$ ).

**Observação 5.114.**  $C \subseteq V$  é uma coclique se e só se  $V \setminus C$  é uma cobertura de vértices.

**Observação 5.115.** Se  $C \subseteq V$  é uma coclique e  $B \subseteq C$  então  $B$  é uma coclique.

Se  $W \subseteq V$  é uma cobertura de vértices e  $W \subseteq X \subseteq V$  então  $X$  é uma cobertura de vértices.

**Definição 5.116.** Um *matching* ou *emparelhamento* ou *conjunto independente de arestas* é um subconjunto  $M$  de  $E$  tal que não existe duas arestas  $e, e' \in M$  que sejam adjacentes (i.e. incidentes ao mesmo vértice).

Um matching diz-se *perfeito* se cobre todos os vértices (i.e. tem tamanho  $\frac{1}{2}|V|$ ). Uma *cobertura de arestas* é um subconjunto  $F$  de  $E$  tal que qualquer vértice  $v$  é incidente a uma aresta em  $F$  (i.e.  $\forall v \in V \exists e \in F : v \in e$ ).

**Observação 5.117.** Uma cobertura de arestas só existe se  $G$  não contém vértices isolados.

**Observação 5.118.** Se  $M \subseteq E$  é um matching e  $N \subseteq M$  então  $N$  é um matching.

Se  $F \subseteq E$  é uma cobertura de arestas e  $F \subseteq F' \subseteq E$  então  $F'$  é uma cobertura de vértices.

**Definição 5.119.** Para um grafo  $G = (V, E)$  define-se os seguintes valores:

- número de coclique de  $G$ :  $\alpha(G) = \max\{|C| : C \text{ é uma coclique em } G\}$ ;
- número de cobertura de arestas de  $G$ :  $\rho(G) = \min\{|F| : F \text{ é uma cobertura de arestas em } G\}$ ;
- número de cobertura de vértices de  $G$ :  $\tau(G) = \min\{|W| : W \text{ é uma cobertura de vértices em } G\}$ ;
- número de matching de  $G$ :  $\nu(G) = \max\{|M| : M \text{ é um matching em } G\}$ .

**Observação 5.120.**  $\alpha(G) \leq \rho(G)$  e  $\nu(G) \leq \tau(G)$ .

O próximo resultado é conhecido por **teorema de Gallai** e relaciona este vários números.

**Teorema 5.121.** Para qualquer grafo  $G = (V, E)$  sem vértices isolados temos:

$$\alpha(G) + \tau(G) = |V| = \nu(G) + \rho(G)$$

*Dem.* A primeira igualdade resulta da observação 5.114. De facto,  $C$  é uma coclique de tamanho máximo se e só se  $V \setminus C$  é uma cobertura de arestas de tamanho mínimo. Logo  $\alpha(G) + \tau(G) = |C| + |V \setminus C| = |V|$ .

Para a segunda igualdade, seja  $M$  um matching de tamanho máximo e seja  $X := \{v \in V : v \notin e \forall e \in M\}$  o conjunto dos vértices que não são cobertos pelo matching ( $|X| = |V| - 2|M|$ ). Como  $G$  não tem vértices isolados, para cada  $v \in X$  pode-se escolher uma aresta  $e_v$  incidente a  $v$ . Por definição de  $X$ ,  $e_v \notin M$ , e além disso, como  $M$  é maximal, para vértices distintos  $v, w \in X$  temos arestas  $e_v$  e  $e_w$  distintas. Logo  $|\{e_v : v \in X\}| = |X|$ . Como  $M \cup \{e_v : v \in X\}$  forma uma cobertura de arestas de  $G$  com tamanho  $|V| - |M|$  temos que  $\nu(G) + \rho(G) \leq |V|$ .

Por outro lado, seja  $F$  uma cobertura de aresta de tamanho mínimo. Vamos produzir um matching do seguinte modo. Damos uma ordenação aos vértices  $v_1, \dots, v_n$ , e tomando  $F_0 = F$  construímos uma sucessão de conjuntos de arestas do seguinte modo. Se  $d_{F_k}(v_{k+1}) \geq 1$  então  $F_{k+1}$  é obtido de  $F_k$  removendo  $d_{F_k}(v_{k+1}) - 1$  arestas incidentes a  $v_{k+1}$  (se  $d_{F_k}(v_{k+1}) = 0$  então  $F_{k+1} = F_k$ ). Temos então que  $M = F_n$  é um matching que se obteve de  $F$  removendo no máximo  $d_F(v_k) - 1$  em cada passo<sup>17</sup>. Assim, o seu tamanho é pelo menos

$$|M| \geq |F| - \sum_{v \in V} (d_F(v) - 1) = |F| - 2|F| + |V| = |V| - |F|$$

Portanto  $\nu(G) \geq |V| - |F| = |V| - \rho(G)$ , logo  $\nu(G) + \rho(G) \geq |V|$ . □

**Definição 5.122.** Seja  $M$  um matching num dado grafo  $G = (V, E)$ . Um caminho  $P : v_0, e_0, v_1, \dots, e_{t-1}, v_t$  em  $G$  diz-se *M-aumentador* ou *caminho de aumento de matching* se:

- (i)  $t$  é ímpar;
- (ii)  $e_1, e_3, \dots, e_{t-2} \in M$ ;
- (iii)  $v_0, v_t \notin \bigcup M$  (i.e.  $v_0$  e  $v_t$  não são incidentes a nenhuma aresta pertencente a  $M$ ).

<sup>17</sup>Note-se que  $d_{F_k}(v_{k+1}) \leq d_F(v_{k+1})$  para qualquer  $k$ , e que se  $d_{F_k}(v_{k+1}) = 0$  então  $d_{F_k}(v_{k+1}) \leq d_F(v_{k+1}) - 1$  pois  $F$  é uma cobertura de arestas (logo  $d_F(v) \geq 1$  para qualquer  $v \in V$ ).

Note-se que a condição (ii) implica que  $e_0, e_2, \dots, e_{t-1} \notin M$ . Além disso,  $M' = (M \setminus \{e_1, e_3, \dots, e_{t-2}\}) \cup \{e_0, e_2, \dots, e_{t-1}\}$  forma um novo matching com  $|M'| = |M| + 1$ . Isto demonstra parcialmente o seguinte resultado.

**Teorema 5.123.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo e seja  $M$  um matching em  $G$ . Então  $M$  é um matching de cardinalidade máxima (i.e.  $|M| = \nu(G)$ ) se e só se não existem caminhos  $M$ -aumentadores.*

*Dem.* Já vimos atrás que se existe um caminho  $M$ -aumentador  $P : v_0, e_0, v_1, \dots, e_{t-1}, v_t$  então  $M' = (M \setminus \{e_1, e_3, \dots, e_{t-2}\}) \cup \{e_0, e_2, \dots, e_{t-1}\}$  forma um novo matching com  $|M'| = |M| + 1$ . Logo, se  $M$  for um matching de cardinalidade máxima não pode haver caminhos  $M$ -aumentadores.

Por outro lado, se  $M$  não é de cardinalidade máxima então existe pelo menos um matching  $M'$  com  $|M'| > |M|$ . Tomemos o grafo  $G' = G[M \cup M']$  (o subgrafo de  $G$  induzido pelo subconjunto de arestas pertencentes a  $M$  ou a  $M'$ ), cada vértice de  $G'$  tem grau menor ou igual a dois logo as componentes conexas de  $G'$  são caminhos ou ciclos. Como  $|M'| > |M|$  pelo menos uma dessas componentes tem mais arestas pertencentes a  $M'$  que a  $M$ , logo essa componente forma um caminho  $M$ -aumentador.  $\square$

Este resultado dá uma maneira de construir um matching de tamanho máximo desde que tenhamos um modo de decidir se existem caminhos  $M$ -aumentadores e de como os encontrar. Uma classe de grafos onde isso pode ser feito é a seguinte.

**Definição 5.124.** Um *grafo bipartido* é um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $V$  pode ser decomposto em duas cocliques usualmente chamadas de *classes de cor*. Dito de outra forma,  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  e  $[v, u] \in E \Rightarrow (v \in V_1 \text{ e } u \in V_2) \text{ ou } (v \in V_2 \text{ e } u \in V_1)$ .

**Definição 5.125.** Um grafo bipartido  $G = (V, E)$ ,  $V = V_1 \cup V_2$  diz-se *completo* se existem arestas a ligar todos os vértices de uma classe de cor  $V_1$  à outra classe de cor  $V_2$  (i.e.  $E = \{[v_1, v_2] : v_1 \in V_1 \text{ e } v_2 \in V_2\}$ ), e denota-se por  $K_{n_1, n_2}$  onde  $n_1 = |V_1|$  e  $n_2 = |V_2|$ .

Existem outras definições alternativas para grafo bipartido que são exemplificadas na seguinte proposição.

**Proposição 5.126.** *As seguinte afirmações são equivalentes:*

- (i)  $G$  é um grafo bipartido;
- (ii)  $G$  não tem ciclos de comprimento ímpar;
- (iii) Existe um homomorfismo de  $G$  em  $K_{1,1} = (\{v_1, v_2\}, \{[v_1, v_2]\})$ .

*Dem.* Exercício.  $\square$

O próximo resultado é conhecido por **teorema de matching de König**.

**Teorema 5.127.** *Para um grafo bipartido  $G = (V, E)$  temos*

$$\nu(G) = \tau(G)$$

*Ou seja, a cardinalidade máxima de um matching é igual à cardinalidade mínima de uma cobertura de vértices.*

*Dem.* Pela observação 5.120, basta mostrar que  $\nu(G) \geq \tau(G)$ . Podemos assumir que  $|E| \geq 1$  (se  $|E| = 0$  então  $\nu(G) = \tau(G) = 0$ ).

Vejamos que

$G$  tem um vértice que é coberto por qualquer matching de tamanho máximo.

Suponhamos por absurdo que tal não acontece. Então, dada  $e = [u, v]$  uma aresta de  $G$ , existiriam dois matchings de tamanho máximo  $M$  e  $N$  que não cobririam  $u$  e  $v$  respectivamente. Seja  $P$  a componente conexa de  $u$  em  $(V, M \cup N)$ . Como  $M$  e  $N$  são matchings  $P$  só pode ser à partida ou um caminho (que até pode ter comprimento zero) ou um ciclo. No entanto, como  $M$  não cobre  $u$ ,  $P$  só pode ser um caminho com vértice final  $u$ . Além disso,  $P$  tem comprimento par, pois senão seria um caminho  $M$ -aumentador. Como  $v$  não é coberto por  $N$ , teríamos que  $P \cup e$  seria um caminho  $N$ -aumentador contrariando o facto de  $N$  ser de tamanho máximo.

Vamos agora concluir a demonstração do teorema. Tomamos um vértice  $u$  que seja coberto por qualquer matching de tamanho máximo. Então para o grafo  $G' := G - u$  temos que  $\nu(G') = \nu(G) - 1$ . Por indução, temos que  $\tau(G') \leq \nu(G')$ , logo existe uma cobertura de vértices  $C$  de  $G'$  de tamanho não superior a  $\nu(G')$ . Então  $C \cup \{u\}$  é uma cobertura de vértices com tamanho não superior a  $\nu(G') + 1 = \nu(G)$ .  $\square$

Sai imediatamente deste resultado juntamente com o teorema de Gallai o seguinte resultado, conhecido por **teorema de cobertura de arestas de König**.

**Corolário 5.128.** *Para um grafo bipartido  $G = (V, E)$  sem vértices isolados temos*

$$\alpha(G) = \rho(G)$$

*Ou seja, a cardinalidade máxima de uma coclique é igual à cardinalidade mínima de uma cobertura de arestas.*

**Algoritmo de aumento de matching para grafos bipartidos:**

- input Seja  $G = (V, E)$  um grafo bipartido e  $M$  um matching (se não se tiver nenhum candidato tome-se  $M = \emptyset$ ).
- passo 1 Seja  $U$  e  $W$  as classes de cores de  $G$ . Orienta-se cada aresta  $e = [u, w]$  de  $G$  (com  $u \in U$  e  $w \in W$ ) da seguinte maneira:
- se  $e \in M$  então orienta-se  $e$  de  $w$  para  $u$ ,  $e = (w, u)$ ;
  - se  $e \notin M$  então orienta-se  $e$  de  $u$  para  $w$ ,  $e = (u, w)$ .
- passo 2 Seja  $D$  o digrafo obtido no passo 1. Considere-se os conjuntos  $U' := U \setminus \bigcup M = \{v \in U : v \notin e \ \forall e \in M\}$  e  $W' := W \setminus \bigcup M = \{v \in W : v \notin e \ \forall e \in M\}$ . Temos que um caminho  $M$ -aumentador (se existir) pode ser encontrado achando um caminho dirigido em  $D$  de um vértice pertencente a  $U'$  para um vértice pertencente a  $W'$ . Se existir faz-se o passo 3, senão termina-se,  $M$  é um matching de tamanho máximo.
- passo 3 Toma-se um caminho  $M$ -aumentador  $P$  e redefine-se  $M := M \Delta EP$  (onde  $\Delta$  é diferença simétrica de conjuntos<sup>18</sup> e  $EP$  é o conjunto das arestas em  $P$ ), volta-se ao passo 1.

Podemos usar o algoritmo de aumento de matching para grafos bipartidos para resolver problemas de atribuição de tarefas.

Suponhamos que temos a cumprir  $n$  tarefas  $t_1, \dots, t_n$  e para tal temos ao dispor  $k$  máquinas  $m_1, \dots, m_k$ . Cada máquina está apta a efectuar algumas tarefas mas só pode fazer uma por dia. O problema de encontrar uma atribuição de tarefas num dia em que sejam cumpridas o máximo número de tarefas é equivalente a determinar um matching de tamanho máximo no grafo bipartido  $G = (V, E)$  onde  $V = \{t_1, \dots, t_n\} \cup \{m_1, \dots, m_k\}$ , sendo  $\{t_1, \dots, t_n\}$  e  $\{m_1, \dots, m_k\}$  as duas classes de cores, e  $[m_i, t_j] \in E$  se a máquina  $m_i$  pode cumprir a tarefa  $t_j$ . Tomamos o seguinte exemplo

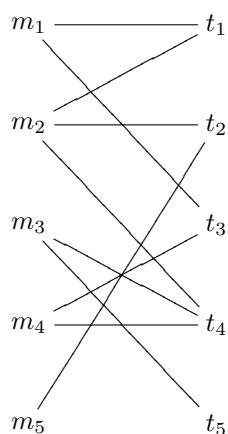
**Exemplo 5.129.** Cinco máquinas estão disponíveis para cumprir cinco tarefas de acordo com o seguinte quadro de compatibilidades:

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$
$m_1$	X		X		
$m_2$	X	X			X
$m_3$				X	X
$m_4$			X	X	
$m_5$		X			

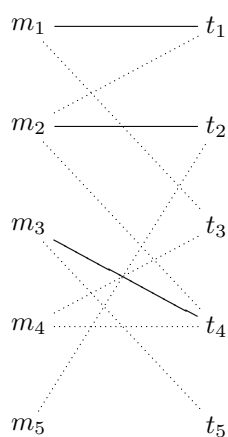
Temos então de determinar um matching de tamanho máximo para o seguinte grafo:

<sup>18</sup> $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .

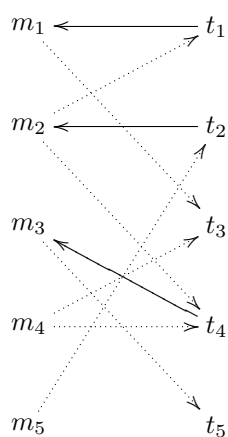




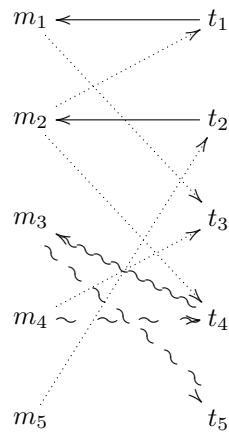
Começando com o matching  $M_0 = \{[m_1, t_1], [m_2, t_2], [m_3, t_4]\}$ :



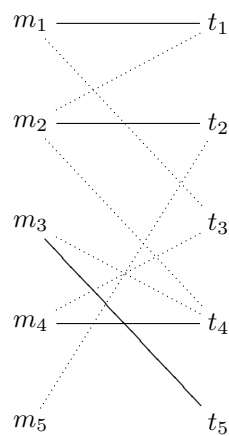
obtemos no passo 1 o digrafo:



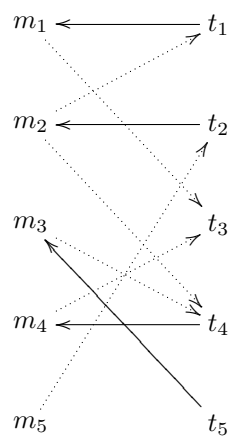
temos  $U' = \{m_4, m_5\}$  e  $W' = \{t_3, t_5\}$ , tomando o caminho dirigido  $P : m_4, t_4, m_3, t_5$ :



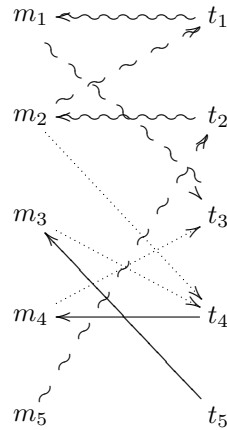
obtemos após o passo 3 o novo matching  $M_1 = \{[m_1, t_1], [m_2, t_2], [m_4, t_4], [m_3, t_5]\}$ :



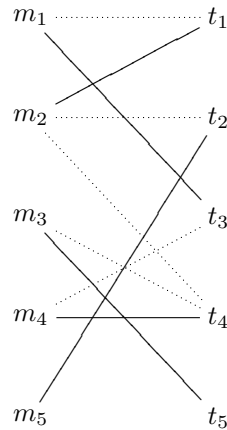
Continuando o algoritmo:



temos  $U' = \{m_5\}$  e  $W' = \{t_3\}$ , tomando o caminho dirigido  $P : m_5, t_2, m_2, t_1, m_1, t_3$ :



obtemos o matching  $M_2 = \{[m_1, t_3], [m_2, t_1], [m_3, t_5], [m_4, t_4], [m_5, t_2]\}$ :



que é de tamanho máximo pois não tem caminhos  $M$ -aumentadores.

Consideremos agora que no exemplo anterior cada máquina  $m_i$  efectua a tarefa  $t_j$  com uma dada eficiência  $w_{ij}$ . Ou seja, temos uma função “peso”  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$  nas arestas. Deste modo, para cada subconjunto  $M$  de  $E$  temos um peso associado

$$w(M) := \sum_{e \in M} w(e)$$

O novo problema agora é, de entre os matchings de  $G$ , encontrar um que maximize (ou minimize) o peso.

**Definição 5.130.** Dado um grafo  $G = (V, E)$  e uma função peso  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que um matching  $M$  é *extremo* se tem peso máximo sobre os matchings de igual cardinalidade  $|M|$ .

Temos portanto que um matching de peso máximo é um matching extremo, embora o contrário nem sempre seja válido.

Seja  $M$  um matching. Define-se uma função “comprimento”  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  do seguinte modo:

$$\begin{aligned} l(e) &:= w(e) \text{ se } e \in M, \\ l(e) &:= -w(e) \text{ se } e \notin M. \end{aligned}$$

**Proposição 5.131.** *Seja  $P$  um caminho  $M$ -aumentador de comprimento mínimo. Se  $M$  é um matching extremo, então  $M' := M \Delta EP$  é também um matching extremo.*

*Dem.* Queremos ver que  $M' := M \Delta EP$  é um matching extremo. Ou seja, que para qualquer matching  $N$  com  $|N| = |M'| = |M| + 1$ ,  $w(N) \leq w(M')$ . Dado  $N$  um matching com  $|N| = |M| + 1$ ,  $M \cup N$  tem uma componente  $Q$  que é um caminho  $M$ -aumentador. Como  $P$  é um caminho

$M$ -aumentador de comprimento mínimo, temos  $l(Q) \geq l(P)$ . Além disso, como  $N\Delta EQ$  é um matching de tamanho  $|M|$  e  $M$  é extremo, temos  $w(N\Delta EQ) \leq w(M)$ .

Portanto temos

$$w(N) = w(N\Delta EQ) - l(Q) \leq w(M) - l(P) = w(M').$$

□

Podemos então adaptar o algoritmo de aumento de matching para grafos bipartidos (AAMGB) de modo a permitir determinar um matching de peso máximo. Basta que no passo 3 escolhamos um caminho  $M$ -aumentador de comprimento mínimo.

**Observação 5.132.** O(s) matching(s) com peso máximo pode(m) não ser de cardinalidade máxima. No entanto o algoritmo produz uma sequência finita de matchings extremos  $M_0, M_1, \dots, M_{\nu(G)}$  com  $|M_k| = k$ , se tomarmos o  $M_k$  com maior peso temos um matching de peso máximo.

Não podemos aplicar o algoritmo de Dijkstra para determinar o caminho  $M$ -aumentador de comprimento mínimo porque temos arestas com comprimentos negativos. Em vez desse podemos usar o *algoritmo de Bellman-Ford*<sup>19</sup> cuja descrição é a seguinte:

Seja  $D = (V, E)$  um digrafo.

- (i) Inicia-se com  $f_0(s) := 0$  e  $f_0(v) := \infty$  para todo o  $v \in V \setminus \{s\}$ .
- (ii) Para  $k < n$  (onde  $n = |V|$ ) define-se

$$f_{k+1} := \begin{cases} f_k(v) & \text{se } f_k(v) \leq \min_{(u,v) \in E} \{f_k(u) + l(u,v)\} \\ f_k(u') + l(u',v) & \text{se } f_k(u') + l(u',v) = \min_{(u,v) \in E} \{f_k(u) + l(u,v)\} < f_k(v) \end{cases}$$

Sendo que no segundo caso  $v$  recebe a etiqueta  $(f_{k+1}, u')$ .

$f_n(v)$  dá o comprimento do caminho dirigido mais curto de  $s$  a  $v$ , sendo que este pode ser recuperado através das etiquetas.

Para que este algoritmo funcione é necessário que o digrafo não contenha ciclos dirigidos com comprimento negativo. No caso particular que estamos a tratar tal é garantido pelo seguinte teorema.

**Teorema 5.133.** *Seja  $M$  um matching extremo num grafo bipartido  $G = (V, E)$ . Então o digrafo  $D$  (obtido a partir de  $G$  de acordo com o passo 1 do AAMGB) não possui ciclos dirigidos de comprimento negativo.*

*Dem.* Suponhamos que existe um ciclo dirigido  $C$  em  $D$  com comprimento negativo,  $l(C) < 0$ . Sendo  $G$  bipartido, a sequência de vértices que define  $C$  é da forma  $u_0, w_1, u_1, \dots, w_t, u_t$  com  $u_0 = u_t$  e  $u_1, \dots, u_t \in U$  e  $w_1, \dots, w_t \in W$ . Do modo como as arestas de  $D$  foram orientadas temos que  $[u_0, w_1], \dots, [u_{t-1}, w_t]$  não pertencem a  $M$  e  $[w_1, u_1], \dots, [w_t, u_t]$  pertencem a  $M$ . Assim  $M'' := M\Delta EC$  é um matching de cardinalidade igual à de  $M$  e de peso  $w(M'') = w(M) - l(C) > w(M)$  o que contradiz o facto de  $M$  ser extremo. □

Note-se no entanto que para exemplos pequenos é mais prático achar o caminho mais curto analisando todos os (não muitos) caminhos dirigidos existentes.

### Exercícios:

**Exercício 5.134.** Demonstre o que é afirmado na observação 5.120.

**Exercício 5.135.** Demonstre a proposição 5.126.

**Exercício 5.136.** Suponhamos que temos 6 objectos que queremos transportar. Para tal podemos recorrer a 7 vasilhas, cada uma das quais pode transportar um só objecto. Na tabela que se segue estão indicadas as dimensões dos objectos:

<sup>19</sup>Para mais detalhes consultar o texto “A Course in Combinatorial Optimization” de A. Schrijver.

Objecto	comprimento	largura	altura	peso
$O_1$	30 cm	10 cm	10 cm	10 kg
$O_2$	20 cm	5 cm	3 cm	2 kg
$O_3$	20 cm	10 cm	10 cm	6 kg
$O_4$	10 cm	8 cm	2 cm	8 kg
$O_5$	40 cm	20 cm	15 cm	11 kg
$O_6$	15 cm	12 cm	11 cm	16 kg

e na tabela que se segue estão indicadas as capacidades das vasilhas:

Vasilha	comprimento	largura	altura	peso
$V_1$	50 cm	30 cm	30 cm	20 kg
$V_2$	40 cm	40 cm	40 cm	15 kg
$V_3$	20 cm	10 cm	5 cm	10 kg
$V_4$	10 cm	10 cm	10 cm	15 kg
$V_5$	10 cm	9 cm	7 cm	7 kg
$V_6$	15 cm	15 cm	9 cm	10 kg
$V_7$	14 cm	13 cm	12 cm	11 kg

Diga, justificando, qual o número máximo de objectos que podem ser transportados pelas vasilhas e apresente uma solução.

**Exercício 5.137.** Um dado centro comercial tem ao seu dispor quatro salas de cinema  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  com capacidades de 200, 150, 70 e 50 lugares respectivamente. Apenas as salas  $S_1$  e  $S_3$  estão equipadas para a projecção de filmes a 3D. Uma dada semana estão disponíveis para exibição cinco filmes  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$  e  $F_5$  sendo  $F_1$  e  $F_2$  filmes 3D. Um estudo de mercado indica que, nessa semana, a audiência expectável por sessão é de 140, 50, 190, 70 e 40 pessoas para os filmes  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$  e  $F_5$  respectivamente. A gerência do centro comercial pretende determinar uma distribuição de filmes por salas que, de acordo com o estudo de mercado, garanta a máxima rentabilidade.

Formalize o problema como um problema de determinar um matching de peso máximo e resolva-o.

**Exercício 5.138.** Dado um grafo bipartido  $G$  com pesos nas arestas, seja  $M_0, M_1, \dots, M_{\nu(G)}$  um sucessão de matchings extremos com  $|M_k| = k$ . Mostre que se o peso de  $M_l$  é superior ao peso de  $M_k$  com  $l > k$  então o peso de  $M_{k+1}$  é superior ao peso de  $M_k$ .

#### Cliques, cocliques e colorações de vértices.

**Definição 5.139.** Uma *clique* num grafo  $G = (V, E)$  é um subconjunto  $C$  de  $V$  tal que quaisquer dois elementos de  $C$  são vértices adjacentes. O *número de clique* de  $G$ , denotado por  $\omega(G)$ , é a cardinalidade máxima das cliques de  $G$ .

**Observação 5.140.** O conjunto  $C$  é um clique do grafo  $G$  se e só se  $C$  é uma coclique do grafo complementar  $\overline{G}$ . Logo  $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ .

**Observação 5.141.** Se  $C \subseteq V$  é uma clique e  $B \subseteq C$  então  $B$  é uma clique.

**Definição 5.142.** Uma *k-coloração (de vértices)* de um grafo  $G = (V, E)$  é uma decomposição de  $V$  em  $k$  cocliques  $C_1, \dots, C_k$ . O *número cromático (de vértices)* de  $G$ , denotado<sup>20</sup> por  $\chi(G)$ , é menor  $k$  para o qual existe uma *k-coloração* de  $G$ . Um grafo  $G$  diz-se *k-colorável (nos vértices)* se existe uma *k-coloração*, ou seja  $\chi(G) \leq k$ .

Em geral é difícil determinar se um grafo é *k-colorável*. Seguem-se alguns resultados.

**Proposição 5.143.** Para qualquer grafo de  $G$  temos  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .

*Dem.* Exercício. □

<sup>20</sup>No texto "A Course in Combinatorial Optimization" de A. Schrijver o número cromático é denotado por  $\gamma(G)$ .

**Proposição 5.144.** *Se  $H$  é um subgrafo de  $G$  então  $\chi(H) \leq \chi(G)$ .*

*Dem.* Exercício. □

**Proposição 5.145.** *Se  $H \rightarrow G$  é um homomorfismo de grafos então  $\chi(H) \leq \chi(G)$ .*

*Dem.* Exercício. □

**Proposição 5.146.** *Se  $\Delta(G)$  o maior grau dos vértices de  $G = (V, E)$  (i.e.  $\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V\}$ ), então*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

*Dem.* Exercício. □

Este resultado pode ser melhorado como mostra seguinte resultado, conhecido por **teorema de Brooks**.

**Teorema 5.147.** *Seja  $G$  um grafo conexo, então  $\chi(G) \leq \Delta(G)$  a menos que  $G$  seja um grafo completo ou  $\Delta(G) = 2$  e  $G$  seja um circuito de comprimento ímpar.*

*Dem.* O teorema é claramente válido para  $\Delta = 0, 1, 2$ . Suponhamos que existem grafos tais que  $\Delta \geq 3$  e  $\chi \geq \Delta + 1$ . Seja  $G$  um grafo nestas condições com ordem mínima. Seja  $v_0$  um vértice de  $G$  e  $G'$  o grafo resultante da remoção de  $v_0$ . Então  $G'$  é  $\Delta(G')$ -colorável (em particular é  $\Delta(G)$ -colorável). Isto implica que  $d(v_0) = \Delta(G)$ , pois senão  $G$  seria  $\Delta(G)$ -colorável.

Do facto de  $G$  ter ordem mínima resulta o seguinte:

- 1 - Em qualquer  $\Delta$ -coloração de  $G'$  os vértices adjacentes a  $v_0$  são de cores diferentes.

Caso contrário  $G$  seria  $\Delta$ -colorável.

Seja  $u_1, u_2, \dots, u_\Delta$  os vértices adjacentes a  $v_0$ . Seja  $1, 2, \dots, \Delta$  as suas cores respectivas em  $G'$ . Seja  $G(i, j)$  o subgrafo induzido pelos vértices de cores  $i$  e  $j$ . Temos então o seguinte:

- 2 - Os vértices  $u_i$  e  $u_j$  estão na mesma componente conexa de  $G(i, j)$ .

Caso contrário, por trocas das cores  $i$  e  $j$  na componente conexa de  $u_i$  ficamos com os dois vértices  $u_i$  e  $u_j$  com a mesma cor, o que contradiz a primeira afirmação.

Seja  $C_{ij}$  a componente conexa de  $G(i, j)$  que contém  $u_i$  e  $u_j$ .

- 3 -  $C_{ij}$  é um caminho de  $u_i$  a  $u_j$ .

Supõe-se que o grau de  $u_i$  em  $C_{ij}$  é maior que 1. Então  $u_i$  é adjacente a pelo menos dois vértices de cor  $j$ . Como em  $G'$ ,  $d(u_i) \leq \Delta - 1$ , podemos recolorir  $u_i$  com uma nova cor  $k$  diferente de  $i$ , o que contradiz a primeira afirmação.

Portanto  $d(u_i) = 1$  e similarmente  $d(u_j) = 1$ .

O grau em  $C_{ij}$  dos outros vértices é 2. Caso contrário existiria um vértice  $u$  de grau superior a 2 em  $C_{ij}$ , e podemos supor que  $u$  é o primeiro vértice no caminho com tal propriedade. Então  $u$  é adjacente a pelo menos três vértices da mesma cor (se  $u$  é da cor  $i$  os outros são da cor  $j$ ). Como  $d(u) \leq \Delta$ ,  $u$  pode ser colorido com outra cor, o que faz com que  $u_i$  e  $u_j$  não pertençam à mesma componente conexa de  $C_{ij}$  contradizendo a segunda afirmação.

Portanto  $C_{ij}$  é um caminho de  $u_i$  a  $u_j$ .

- 4 - Para qualquer  $i, j$  e  $k$ ,  $C_{ij}$  e  $C_{ik}$  não têm vértices comuns excepto  $u_i$ .

Seja  $u \neq u_i$  comum a  $C_{ij}$  e  $C_{ik}$ . Então  $u$  é colorido pela cor  $i$ , e é adjacente a dois vértices de cor  $j$  e a dois de cor  $k$ . Como  $d(u) \leq \Delta$ ,  $u$  pode ser recolorido com uma cor  $l$  distinta de  $i, j$  e  $k$ . Isto faz desconectar  $u_i$  e  $u_j$ , contradizendo a segunda afirmação.

Vamos agora contradizer esta última afirmação.

Se  $G$  não é um grafo completo então existem dois vértices  $u_1$  e  $u_2$  que não são adjacentes. Então o caminho  $C_{12}$  contém um vértice  $u$  diferente de  $u_2$  e adjacente a  $u_1$ . Supondo que trocávamos as cores 1 e 3 no caminho  $C_{13}$  (que existe pois  $\Delta(G) \geq 3$ ), então temos uma nova coloração de  $G'$ ,  $u_1$  fica com cor 3 e  $u_3$  com cor 1. Neste caso as novas componentes conexas  $C'_{12}$  e  $C'_{23}$  contêm o vértice comum  $u$ , contradizendo a quarta afirmação.

Com isto terminamos a demonstração. □

Para alguns grafos *regulares* (i.e. grafos em que todos os vértices têm o mesmo grau), este resultado dá-nos um majorante do número cromático bem próximo deste. No entanto, para grafos em que os graus dos vértices variam bastante é mais útil o seguinte resultado.

**Proposição 5.148.** *Seja  $\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V\}$  e  $sw(G) = \max\{\delta(G) : H \text{ é subgrafo de } G\}$ , temos que*

$$\chi(G) \leq sw(G) + 1.$$

*Dem.* Exercício. □

Uma classe de grafos onde a proposição anterior é, em geral, mais útil que o teorema de Brooks é a classe dos grafos mergulhados numa dada superfície  $M$ .

**Definição 5.149.** Um grafo  $G = (V, E)$  diz-se *mergulhável* numa superfície  $M$  se pode ser "desenhado" na superfície  $M$ . Dito de uma forma mais rigorosa, existem  $n = |V|$  pontos distintos  $v_1, \dots, v_n$  da superfície  $M$  (que representam os vértices de  $G$ ) e para cada aresta  $e = [v_i, v_j]$  existe um caminho  $\gamma_e : [0, 1] \rightarrow M$  (que representa a aresta  $e$ ) tal que  $\gamma_e(0) = v_i$  e  $\gamma_e(1) = v_j$ . Além disso, temos que o interior de qualquer caminho,  $\gamma_e(]0, 1[)$ , representando uma aresta  $e$  não intersecta nem o conjunto dos vértices nem os outros caminhos que representam as arestas.

Se um grafo for mergulhável no plano  $\mathbb{R}^2$  diz-se *planar*.

**Observação 5.150.** Por projecção estereográfica um grafo é planar se e só se é mergulhável na esfera.

Uma condição necessária para um grafo conexo ser planar, deduzida pela fórmula de Euler, é a seguinte.

**Proposição 5.151.** *Seja  $G$  um grafo planar conexo com  $n > 2$  vértices e  $m$  arestas, então  $m \leq 3n - 6$ .*

*Dem.* Exercício. □

**Corolário 5.152.** *Se  $G$  é um grafo planar então  $\delta(G) \leq 5$ .*

*Dem.* Exercício. □

Como consequência temos que qualquer grafo planar é colorável com seis cores.

**Proposição 5.153.** *Se  $G$  é um grafo planar então  $\chi(G) \leq 6$ .*

*Dem.* Resulta imediatamente da proposição 5.148 e do corolário 5.152 (note-se que um subgrafo de um grafo planar é um grafo planar). □

Este resultado não é optimal, não há grafos planares que necessitem de cinco ou mais cores. É isto que diz o famoso **teorema das quatro cores**.

**Teorema 5.154.** *Se  $G$  é um grafo planar então  $\chi(G) \leq 4$ .*

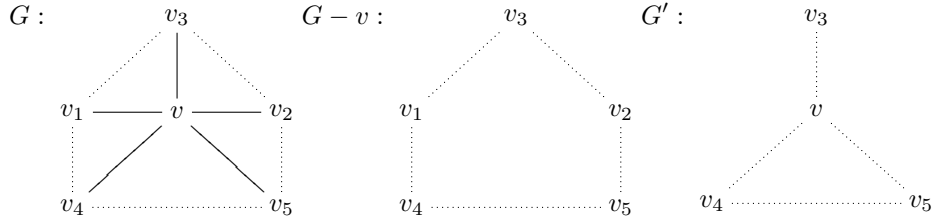
Este resultado (nada trivial) não pode ser melhorado pois existem grafos planares com número cromático igual a quatro, por exemplo o grafo completo  $K_4$ . A sua demonstração só foi possível com o recurso a meios computacionais de modo a analisar centenas de configurações locais. É, no entanto, muito mais fácil demonstrar o seguinte resultado mais fraco.

**Teorema 5.155.** *Se  $G$  é um grafo planar então  $\chi(G) \leq 5$ .*

*Dem.* Para demonstrar tal por indução basta ver que a propriedade  $\chi(G) \leq 5$  é hereditária para grafos planar.

Dado um grafo planar  $G$ , assumamos que  $\chi(H) \leq 5$  para qualquer grafo planar  $H$  com menos vértices que  $G$ . Seja  $v$  um vértice de  $G$  com grau mínimo (sabemos pelo corolário 5.152 que  $d(v) \leq 5$ ). Podemos colorir os vértices de  $G - v$  com 5 cores. Se  $d(v) \leq 4$  então podemos estender essa coloração para o vértice  $v$  pois há pelo menos uma cor livre, logo  $\chi(G) \leq 5$ . No caso em que

$d(v) = 5$  temos que existem dois vértices vizinhos  $v_1$  e  $v_2$  que não são adjacentes<sup>21</sup>. Nesse caso podemos construir um novo grafo planar  $G'$  com menos vértices que  $G$ , identificando em  $G - v$  os vértice  $v_1$  e  $v_2$ .



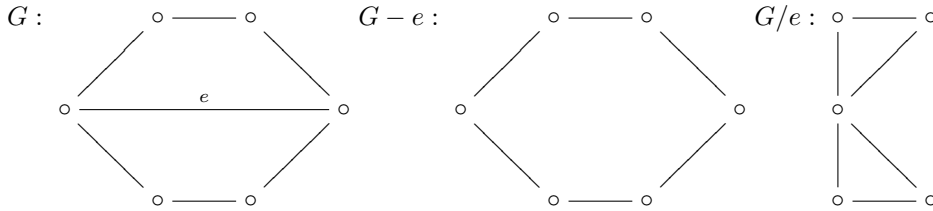
Uma 5-coloração de  $G'$  induz uma 5-coloração de  $G - v$  onde  $v_1$  e  $v_2$  recebem a mesma cor, portanto pode ser estendida a  $G$ .  $\square$

**Definição 5.156.** Dado um grafo  $G = (V, E)$  e uma aresta  $e$ , denota-se por  $G - e$  o grafo obtido por *eliminação* da aresta  $e$ . Ou seja,  $G - e = (V, E \setminus \{e\})$ .

**Definição 5.157.** Dado um grafo  $G = (V, E)$  e uma aresta  $e = [u, v]$ , denota-se por  $G/e$  o grafo obtido por *contração* da aresta  $e$ . Tal consiste em remover os vértices extremos  $u$  e  $v$  da aresta  $e$  e substituir-los por um novo vértice  $w$  que é adjacentes a todos os outros vértices que eram adjacentes a  $u$  ou  $v$ . Ou seja,  $G/e = (V', E')$  onde  $V' = (V \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$  e  $E' = \{[v_i, v_j] \in E : v_i, v_j \notin \{u, v\}\} \cup \{[v_i, w] : [v_i, u] \in E \text{ ou } [v_i, v] \in E\}$ .

Ao grafo  $G/e$  chamamos uma *contração elementar* de  $G$ .

**Exemplo 5.158.**



**Definição 5.159.** Se um grafo  $H$  é obtido do grafo  $G$  por uma sequência de contrações elementares dizemos que  $H$  é uma *contração* de  $G$ . Um *menor* de  $G$  é um grafo que é contração de um subgrafo de  $G$ .

Note-se que se um grafo  $G$  é planar então qualquer menor de  $G$  também é planar. Portanto para mostrar que um grafo não é planar basta encontrar um menor que não o seja. O próximo resultado, conhecido como **teorema de Wagner** e que não iremos demonstrar, reduz essa procura apenas a dois grafo,  $K_5$  e  $K_{3,3}$ .

**Teorema 5.160.** Um grafo é planar se e só se não contém o  $K_5$  ou o  $K_{3,3}$  como menor.

A seguinte conjectura mantém-se em aberto e relaciona o número cromático de grafo com o seus menores. É conhecida por **conjectura de Hadwiger**.

**Conjectura 5.161.** Se  $\chi(G) \geq n$  então  $G$  contém o  $K_n$  como menor.

Esta conjectura está em aberto para  $n \geq 7$ . Para  $n = 1$  e  $n = 2$  é trivial e o caso  $n = 3$  é consequência imediata da proposição 5.126, os casos  $n = 5$  e  $n = 6$  provou-se ser equivalentes ao teorema das quatro cores.

**Definição 5.162.** Chamamos *polinómio cromático* do grafo  $G$  à função  $P_G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que a cada natural  $k$  atribui o número de  $k$ -colorações de  $G$ .

**Proposição 5.163.** O polinómio cromático satisfaz as seguintes propriedades:

<sup>21</sup>Se os cinco vértices vizinhos fossem adjacentes entre si, teríamos que o grafo completo  $K_5$  seria planar e que não é verdade como facilmente se deduz da proposição 5.151.



- (1) Se  $t < \chi(G)$  então  $P_G(t) = 0$ ;
- (2)  $P_{K_n}(t) = t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)$ ;
- (3)  $P_{\overline{K_n}}(t) = t^n$  onde  $\overline{K_n}$  é o complementar de  $K_n$  (i.e. o grafo vazio com  $n$  vértices);
- (4)  $P_{G \sqcup H} = P_G P_H$  onde  $G \sqcup H$  é a união disjunta dos grafos  $G$  e  $H$ ;
- (5)  $P_G = P_{G-e} - P_{G/e}$ ;
- (6)  $P_G$  é um polinómio mónico de grau igual à ordem de  $G$ ,  $n = |V|$ , e o segundo coeficiente de maior grau de  $P_G$  é o simétrico do número de arestas,  $m = |E|$ . Ou seja,  $P_G(t) = t^n - mt^{n-1} + \dots$ .
- (7) Os coeficientes de  $P_G$  alternam de sinal. Ou seja,  $P_G(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$  com  $(-1)^k a_{n-k} \geq 0$ .

Dem. Exercício. □

### Exercícios:

**Exercício 5.164.** Demonstre a proposição 5.143.

**Exercício 5.165.** Demonstre a proposição 5.144.

**Exercício 5.166.** Demonstre a proposição 5.145.

**Exercício 5.167.** Demonstre a proposição 5.146.

**Exercício 5.168.** Demonstre a proposição 5.148.

**Exercício 5.169.** Demonstre a proposição 5.151.

**Exercício 5.170.** Demonstre o corolário 5.152.

**Exercício 5.171.** Demonstre a proposição 5.163.

**Exercício 5.172.** Na seguinte tabela estão indicados as disciplinas ( $d_j$ ) às quais os alunos ( $a_i$ ) de um dado ano de um dado curso estão matriculados:

	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$
$a_1$	X				X	
$a_2$	X	X				
$a_3$	X			X		
$a_4$					X	X
$a_5$	X	X		X		
$a_6$		X	X	X		
$a_7$		X		X		
$a_8$		X	X			

Pretende-se determinar uma atribuição de datas de exame de modo a que disciplinas com alunos em comum não tenham datas sobrepostas. Formalize o problema como um problema de coloração de grafos e responda, justificadamente, às seguintes questões.

- (a) Qual o número mínimo de datas necessárias?
- (b) Se tivermos à disposição 7 datas, quantas soluções é possível encontrar?

**Exercício 5.173.** Determine, justificando, o número cromático do grafo  $G = (V, E)$  dado pela matriz de adjacência:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Exercício 5.174.** Suponhamos que uma dada empresa tem 6 empregados  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$  e que um dado dia são necessárias realizar 5 tarefas  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$  com a duração de uma hora cada tarefa à exceção das tarefas  $T_4$  e  $T_5$  que demoram 2 e 3 horas a realizar (respectivamente). No quadro que se segue estão assinalados com um X os empregados necessários para cada tarefa:

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$
$T_1$	X		X			X
$T_2$	X	X			X	
$T_3$				X	X	X
$T_4$			X	X		
$T_5$		X				

Pretende-se arranjar um horário laboral de modo a realizar as cinco tarefas no menor número de horas possível.

- Formalize o problema como um problema de coloração de grafos.
- Resolva o problema apresentando um horário válido com um número mínimo de horas.

**Exercício 5.175.** Mostre que os grafos  $K_5$  e  $K_{3,3}$  não são planares.

**Exercício 5.176.** Mostre a conjectura de Hadwiger para  $n = 4$ .

**Exercício 5.177.** Mostre que um grafo é  $k$ -colorável se e só se existe uma orientação das aresta de  $G$  tal que o digrafo obtido não possui caminhos dirigidos de comprimento  $k$ .

**Exercício 5.178.** Seja  $C_n$  o grafo formado por um ciclo de ordem  $n$ . Mostre que o polinómio cromático de  $C_n$  é

$$P(C_n, t) = (t - 1)^n + (-1)^n(t - 1)$$

### Colorações de arestas.

**Definição 5.179.** Uma  $k$ -coloração de arestas de um grafo  $G = (V, E)$  é uma decomposição de  $E$  em  $k$  matchings  $M_1, \dots, M_k$ . O índice cromático ou número de coloração de arestas de  $G$ , denotado<sup>22</sup> por  $\chi'(G)$ , é menor  $k$  para o qual existe uma  $k$ -coloração de arestas de  $G$ .

**Observação 5.180.**  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ .

Por outro lado, o próximo resultado, conhecido como **teorema de Vizing**, dá-nos um majorante para o índice cromático bastante próximo do anterior minorante.

**Teorema 5.181.** Para qualquer grafo (simples)  $G = (V, E)$  temos que  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

Deste modo os grafos dividem-se em duas classes, os grafos com  $\chi' = \Delta$  e os grafos com  $\chi' = \Delta + 1$ .

<sup>22</sup>No texto "A Course in Combinatorial Optimization" de A. Schrijver o número coloração de arestas é denotado por  $\chi(G)$ .

De entre os grafos que pertencem à primeira classe estão os *grafos cúbicos* (i.e. grafos regulares de grau três) planares sem pontes. Tal afirmação é equivalente ao teorema das quatro cores, como foi demonstrado por Tait.

**Teorema 5.182.** *Qualquer grafo cúbico planar sem pontes é tricolorável nas arestas.*

Dentro da classe dos grafos com  $\chi' = \Delta$  também estão os grafos bipartidos como mostra o seguinte resultado, chamado de **teorema da coloração de aresta de König**.

**Teorema 5.183.** *Para um grafo bipartido  $G = (V, E)$  temos que  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .*

*Dem.* Se  $\Delta(G) = 2$ , então  $G$  é uma união de caminhos e ciclos (de ordem par pois  $G$  é bipartido) logo as arestas de  $G$  podem ser coloridas com 2 cores. Se  $\Delta(G) = 1$  então  $E$  é um matching de  $G$  logo  $\chi'(G) = 1$ .

No caso geral, considere-se uma  $\Delta(G)$ -coloração parcial de arestas de  $G$  com o número máximo possível de arestas coloridas de modo que arestas adjacentes tenham cores diferentes. Suponhamos que existe uma aresta  $e$  que não foi colorida (senão já temos o resultado pretendido). Essa aresta liga dois vértices  $v_1$  e  $v_2$ . Como estamos a colorir com  $\Delta(G)$  cores tanto  $v_1$  como  $v_2$  não são incidentes a pelo menos um cor cada. Podemos supor que  $v_1$  não é incidente a uma cor (digamos vermelho) e  $v_1$  não é incidente a outra<sup>23</sup> cor (digamos azul). Sendo assim, tomamos o subgrafo de  $G$  induzido pelas arestas de cor azul e vermelho mais a aresta  $e$ . Tal subgrafo  $H$  é bipartido e tem  $\Delta(H) \leq 2$ , logo pode ser colorido com as cores vermelho e azul de modo a colorir também a aresta  $e$ . Obtemos então uma nova coloração com mais arestas coloridas que a anterior contradizendo o facto de esta colorir o número máximo possível de arestas.  $\square$

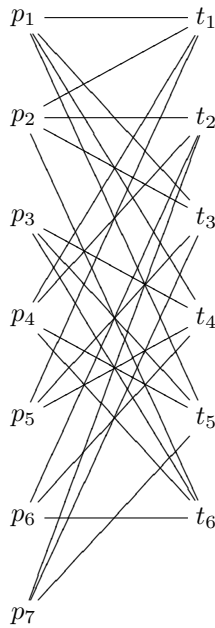
Esta demonstração dá-nos um algoritmo para colorir um as arestas de um grafo bipartido em tempo polinomial. Além disso, podemos obter uma  $k$ -coloração num grafo  $G = (V, E)$  com  $\chi'(G) \leq k$  de modo que as cardinalidades de cada par de matchings (classes de cores) difiram no máximo em um. Ou seja, cada classe de cor tem  $\lfloor \frac{|E|}{k} \rfloor$  ou  $\lceil \frac{|E|}{k} \rceil$  arestas. O modo de o conseguir é tomar duas classes de cor  $M_i$  e  $M_j$  em que as cardinalidades difiram em mais que um ( $|M_i| > |M_j| + 1$ ), e trocar as cores numa das componentes conexas do subgrafo induzido pelas classes que tenhas mais arestas em  $M_i$  que em  $M_j$  e repetir este processo até as cardinalidades difirem em não mais que um.

**Exemplo 5.184.** Consideremos o problema de encontrar um horário o mais compacto possível, que seja compatível com o seguinte quadro de atribuição de professores ( $p_1, \dots, p_7$ ) por turmas ( $t_1, \dots, t_6$ ):

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$
$p_1$	X		X	X	X	
$p_2$	X	X	X			X
$p_3$				X	X	X
$p_4$	X	X			X	X
$p_5$	X		X	X		
$p_6$		X		X		X
$p_7$		X	X		X	

Tal problema consiste em colorir com o menor número de cores possível as arestas do seguinte grafo bipartido:

<sup>23</sup>Se  $v_1$  e  $v_2$  não fossem incidentes a uma mesma cor, essa cor poderia ser usada para colorir a aresta  $e$ .



Pelo teorema de Kőnig, como  $\Delta = 4$ , bastam quatro cores. Logo, é possível construir um horário em que as aulas sejam todas dadas em quatro horas e além disso, pode ser feito de modo a não haver mais de seis ( $\lceil \frac{|E|}{4} \rceil$ ) aulas em cada hora. Por exemplo:

	sala 1	sala 2	sala 3	sala 4	sala 5	sala 6
1ª hora	$(p_1, t_1)$	$(p_2, t_2)$	$(p_5, t_3)$	$(p_6, t_4)$	$(p_7, t_5)$	$(p_4, t_6)$
2ª hora	$(p_2, t_1)$	$(p_4, t_2)$	$(p_1, t_3)$	$(p_5, t_4)$	$(p_3, t_5)$	$(p_6, t_6)$
3ª hora	$(p_5, t_1)$	$(p_7, t_2)$	$(p_2, t_3)$	$(p_1, t_4)$	$(p_4, t_5)$	$(p_3, t_6)$
4ª hora	$(p_4, t_1)$	$(p_6, t_2)$	$(p_7, t_3)$	$(p_3, t_4)$	$(p_1, t_5)$	$(p_2, t_6)$

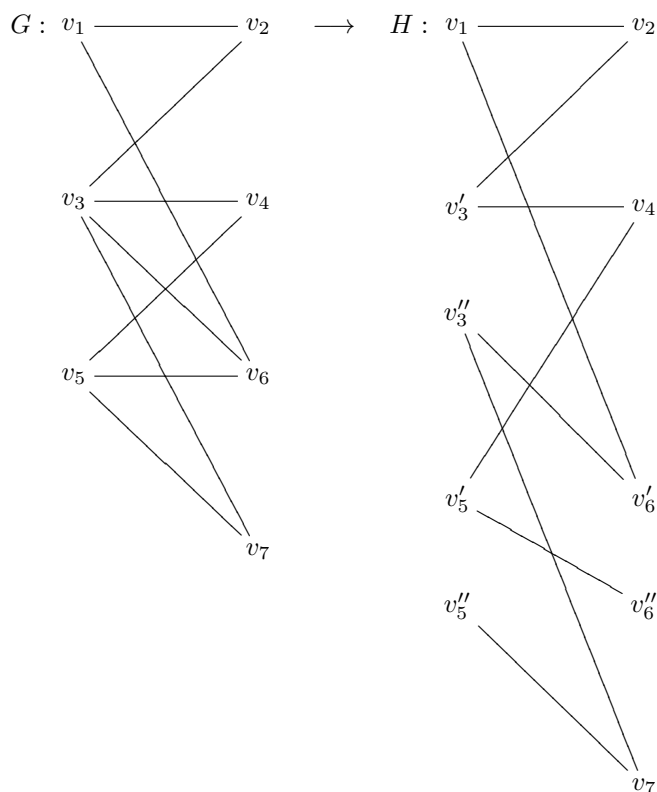
**Corolário 5.185.** *Dado um grafo  $G$  seja  $\xi(G)$  o número máximo de cobertura de arestas disjuntas duas a duas. Se  $G$  é bipartido então*

$$\xi(G) = \delta(G)$$

*Ou seja, o número máximo de cobertura de arestas disjuntas duas a duas é igual ao grau mínimo de  $G$ .*

*Dem.* Como cada vértice tem que ser coberto por uma cobertura de arestas é fácil ver que  $\xi(G) \leq \delta(G)$ .

Por outro lado, podemos construir de  $G$  um grafo bipartido  $H$  em que os graus dos vértices não são superiores a  $\delta(G)$ . Basta ir dividindo cada vértice  $v$  com grau maior que  $\delta(G)$  em dois vértices  $v'$  e  $v''$ , um com grau  $\delta(G)$  e o outro com grau  $d(v) - \delta(G)$  até não restar vértices com grau superior a  $\delta(G)$ .



Temos então que, pelo teorema de coloração de arestas de König, que  $H$  possui uma  $\delta$ -coloração de arestas. Cada classe de cor corresponde a uma cobertura de arestas em  $G$  logo há pelo menos  $\delta(G)$  coberturas de arestas disjuntas duas a duas, ou seja,  $\xi(G) \geq \delta(G)$ .  $\square$

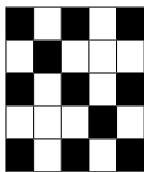
### Exercícios:

**Exercício 5.186.** Suponhamos que uma dada escola há 7 turmas  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$  e 7 professores  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$  que lecionam as turmas (uma hora por turma) de acordo com o seguinte quadro:

	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$
$p_1$	X		X	X	X		
$p_2$	X	X	X			X	
$p_3$				X	X	X	X
$p_4$	X	X				X	X
$p_5$	X		X	X	X		
$p_6$		X		X		X	X
$p_7$		X	X		X		X

- Mostre que é possível arranjar um horário de modo que a escola só esteja ocupada durante 4 horas.
- Mostre que o horário da alínea anterior pode ser feito de modo que só sejam necessárias 7 salas.
- Apresente um horário que nas condições das alíneas anteriores, ou seja todas as aulas são dadas num máximo de 4 horas em apenas 7 salas.

**Exercício 5.187.** Pretende-se preencher as casas em branco do quadro abaixo com letras  $(A, B, C, D, \dots)$  de modo que não haja letras repetidas na mesma linha ou coluna.



- (a) Diga, justificando, qual o número máximo de vezes que uma letra pode ser repetida numa configuração desse tipo.
- (a) Diga, justificando, qual o número mínimo de letras necessárias numa configuração desse tipo.

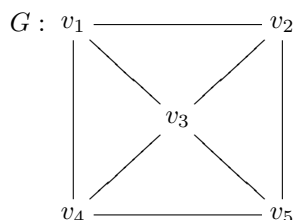
**Exercício 5.188.** Mostre que o número de coloração de arestas de um grafo completo de  $2^n$  vértices é  $2^n - 1$ . Ou seja,

$$\chi(K_{2^n}) = 2^n - 1$$

### Grafos perfeitos.

**Definição 5.189.** Um grafo  $G$  diz-se *perfeito* se  $\omega(G') = \chi(G')$  para qualquer subgrafo induzido  $G'$  de  $G$ .

**Exemplo 5.190.** O seguinte grafo



é perfeito. Todos o seus subgrafos induzidos têm número cromático igual ao número de clique.

$S \subseteq V$	$G' = G[S]$	$\omega(G')$	$\chi(G')$
$\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}$	•	1	1
$\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}$	• — •	2	2
$\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_4\}$	• •	1	1
$\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2, v_3, v_5\}, \{v_3, v_4, v_5\}$	• — •   \ / •	3	3
$\{v_1, v_2, v_4\}, \{v_1, v_2, v_5\}, \{v_1, v_3, v_5\}, \{v_3, v_4, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_2, v_4, v_5\}$	• — • — •	2	2
$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3, v_5\}, \{v_1, v_3, v_4, v_5\}, \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$	• — •   \ / • — •	3	3
$\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$	• — •     • — •	2	2
$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$	• — •   \ / • — •   \ / •	3	3

Outros exemplos de grafos perfeitos são os grafos completos e os seus complementares, bem como os grafos bipartidos.

**Teorema 5.191.** *Um grafo é perfeito se e só se  $\omega(G')\alpha(G') \geq |V(G')|$  para cada subgrafo induzido  $G'$  de  $G$ .*

*Dem.* A condição necessária é fácil de verificar. Se  $G$  é perfeito e  $G'$  é um subgrafo induzido então  $\omega(G') = \chi(G')$  logo  $\omega(G')\alpha(G') = \chi(G')\alpha(G') \geq |V(G')|$  pois  $V(G')$  pode ser decomposto em  $\chi(G')$  cocliques todas elas de tamanho não superior a  $\alpha(G')$ .

Para demonstrar a condição recíproca. Seja  $G = (V, E)$  um grafo não perfeito que satisfaça a condição  $\omega(G')\alpha(G') \geq |V(G')|$  para todo o subgrafo induzido  $G'$  de  $G$ , com cardinalidade mínima. Logo para qualquer subgrafo induzido  $G'$  de  $G$  temos  $\omega(G') = \chi(G')$  se  $G' \neq G$  e  $\omega(G) < \chi(G)$ .

Seja  $\omega := \omega(G)$  e  $\alpha := \alpha(G)$  e assumamos  $V(G) = \{1, \dots, n\}$ .

Seja  $C_0$  uma coclique de tamanho  $\alpha$ . Por minimalidade de  $G$ , o subgrafo de  $G$  induzido por  $V(G) \setminus \{v\}$  é perfeito para qualquer vértice  $v$ , logo  $V(G) \setminus \{v\}$  pode ser decomposto em  $\omega$  cocliques (pois  $\chi(G[V(G) \setminus \{v\}]) = \omega(G[V(G) \setminus \{v\}]) \leq \omega$ ). Fazendo isto para cada  $v \in C_0$ , obtemos

$\alpha\omega + 1$  cocliques (não necessariamente distintas entre si)  $C_0, C_1, \dots, C_{\alpha\omega}$  tais que cada vértice de  $G$  é coberto exactamente por  $\alpha$  destas cocliques. (\*)

Para cada  $i = 0, \dots, \alpha\omega$  existe uma clique  $K_i$  de tamanho  $\omega$  tal que  $K_i \cap C_i = \emptyset$ . Senão o subgrafo  $G'$  de  $G$  induzido por  $V(G) \setminus C_i$  seria tal que  $\omega(G') < \omega$  o que implicaria, pelo facto de  $G'$  ser perfeito, que  $\chi(G') \leq \omega - 1$ , logo  $\chi(G) \leq \omega$  o que contradiz o que já foi dito acerca de  $G$ .

Além disso, temos que se  $i \neq j$  então  $|K_i \cap C_j| = 1$ . Isto acontece porque, por (\*), cada um dos  $\omega$  vértices em  $K_i$  é coberto por  $\alpha$  das cocliques  $C_0, \dots, C_{\alpha\omega}$ . Como cada clique só intersecta um coclique no máximo em um vértice, há  $\alpha\omega$  cocliques a intersectar  $K_i$ . Ou seja, todas as cocliques  $C_0, \dots, C_{\alpha\omega}$  à excepção de  $C_i$  intersectam  $K_i$  em um vértice ( $|K_i \cap C_j| = 1 \forall i \neq j$ ).

Consideremos agora as matrizes de incidência  $M, N \in \{0, 1\}^{\alpha\omega+1, n}$  de  $C_0, \dots, C_{\alpha\omega}$  e  $K_0, \dots, K_{\alpha\omega}$  respectivamente. Ou seja,  $M = [m_{i,j}]$  com  $m_{i,j} = 1 \Leftrightarrow j \in C_i$  e  $N = [n_{i,j}]$  com  $n_{i,j} = 1 \Leftrightarrow j \in K_i$ . Temos então que  $MN^T = J - I$  onde  $J$  é a matriz  $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$  com todas as entradas iguais a 1 e  $I$  é a matriz identidade.

Teríamos então que  $|V(G)| = n \geq \text{car}(M) \geq \text{car}(MN^T) = \alpha\omega + 1 > \alpha\omega$  o que contradiz a definição de  $G$ .  $\square$

Como corolário deste resultado temos o **teorema do grafo perfeito de Lovász**.

**Corolário 5.192.** *O complemento de um grafo perfeito é também um grafo perfeito.*

*Dem.* Basta ver que, se  $G[U]$  é o subgrafo de  $G$  induzido pelo conjunto  $U \subseteq V(G)$  então o seu complemento é o subgrafo de  $\overline{G}$  (complemento de  $G$ ) induzido pelo mesmo conjunto  $U$ . Ou seja,  $\overline{G}[U] = \overline{G}[U]$ . Depois segue naturalmente que  $\omega(\overline{G}[U]) = \alpha(G[U])$  e  $\alpha(\overline{G}[U]) = \omega(G[U])$ , logo  $\omega(\overline{G}[U])\alpha(\overline{G}[U]) \geq |V(\overline{G}[U])|$ .  $\square$

Note-se que, como o complemento do complemento de um grafo é o próprio grafo, verificar se um grafo é perfeito é equivalente a verificar se o seu complemento é perfeito. Tal pode ser útil quando o complemento de um grafo é mais simples (por ter menos arestas ou ser bipartido por exemplo) que o próprio grafo. Em particular, temos que o complemento de qualquer grafo bipartido é perfeito.

**Corolário 5.193.** *O complemento de um grafo bipartido é um grafo perfeito. Equivalentemente, o número de cobertura de arestas  $\rho(G)$  de um grafo bipartido  $G$  sem vértices isolados é igual ao número de coclique  $\alpha(G)$  de  $G$ . Ou seja,  $\rho(G) = \alpha(G)$ .*

Note-se que isto não é mais que o teorema de cobertura de arestas de König.

*Dem.* Exercício.  $\square$

Também o teorema de coloração de arestas de König resulta como corolário do teorema do grafo perfeito de Lovász.

**Corolário 5.194.** O grafo linha<sup>24</sup>  $L(G)$  de um grafo bipartido  $G$  é um grafo perfeito. Equivalentemente, o número de coloração de arestas  $\chi'(G)$  de um grafo bipartido  $G$  é igual ao grau máximo  $\Delta(G)$  de  $G$ . Ou seja,  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .

*Dem.* Exercício. □

**Definição 5.195.** Dado um conjunto parcialmente ordenado  $(X, \leq)$ , um subconjunto  $C$  de  $X$  é chamado de *cadeia* se todos os seus membros são comparáveis (i.e.  $\forall x, y \in C, x \leq y$  ou  $y \leq x$ ). Um subconjunto  $A$  de  $X$  é chamado de *anticadeia* se todos os seus membros não são comparáveis entre si (i.e.  $\forall x, y \in A, x \not\leq y$  e  $y \not\leq x$ ).

**Definição 5.196.** Dado um conjunto (finito) parcialmente ordenado  $(X, \leq)$ , definimos o *grafo de comparabilidade* ao grafo  $G = (V, E)$  cujos vértices são os elementos de  $X$  (i.e.  $V = X$ ) e dois elementos distintos são adjacentes se e só se são comparáveis (i.e.  $[x, y] \in E \Leftrightarrow x < y$  ou  $y < x$ ).

**Teorema 5.197.** Num conjunto parcialmente ordenado finito  $(X, \leq)$  o tamanho máximo de uma cadeia é igual ao número mínimo de anticadeias necessárias para cobrir  $X$ .

*Dem.* Para cada elemento  $x$  de  $X$  definimos  $\phi(x)$  como sendo o tamanho máximo de uma cadeia que tenha  $x$  como elemento máximo. Seja  $k$  o valor máximo de  $\phi$  em  $X$ . Para  $i = 1, \dots, k$  seja  $A_i$  o conjunto dos elementos  $x$  com  $\phi(x) = i$ . Então  $A_1, \dots, A_k$  são  $k$  anticadeias cobrindo  $X$ .

Por outro lado, como qualquer anticadeia intersecta qualquer cadeia em no máximo um elemento, temos que são necessárias pelo menos  $k$  anticadeias para cobrir  $X$ .

Portanto temos que o tamanho máximo de uma cadeia em  $X$  (que é igual a  $k$ ) será igual o número mínimo de anticadeias necessárias para cobrir  $X$ . □

Note-se que num grafo de comparabilidade as cliques são as cadeias e as cocliques são anticadeias. Portanto o que o resultado anterior diz é que para um grafo de comparabilidade  $\omega = \chi$ . Como um subgrafo induzido de um grafo de comparabilidade é um grafo de comparabilidade, temos o seguinte resultado.

**Corolário 5.198.** Qualquer grafo (finito) de comparabilidade é um grafo perfeito.

Resulta então do teorema do grafo perfeito o seguinte resultado, conhecido por **teorema da decomposição de Dilworth**.

**Corolário 5.199.** Num conjunto parcialmente ordenado finito  $(X, \leq)$  o tamanho máximo de uma anticadeia é igual ao número mínimo de cadeias necessárias para cobrir  $X$ .

*Dem.* Basta ver que se  $G$  é o grafo de comparabilidade deste conjunto parcialmente ordenado. Então o tamanho máximo de uma anticadeia é igual a  $\omega(\overline{G})$  e o número mínimo de cadeias necessárias para cobrir  $X$  é igual a  $\chi(\overline{G})$ , onde  $\overline{G}$  é o complemento de  $G$ . Logo se  $G$  é perfeito então  $\overline{G}$  também o é e portanto  $\omega(\overline{G}) = \chi(\overline{G})$ . □

O teorema do grafo perfeito de Lovász não é a última palavra acerca dos grafos perfeitos. De facto, Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas demonstraram em 2002 um resultado conjecturado por Berge [1963] e que ficou conhecido como **teorema forte do grafo perfeito**. Este diz o seguinte.

**Teorema 5.200.** Um grafo é perfeito se e só se  $G$  não contém nenhum ciclo de ordem ímpar  $C_{2k+1}$  com  $k \geq 2$  ou o seu complemento  $\overline{C}_{2k+1}$  como subgrafo induzido.

**Exercícios:**

**Exercício 5.201.** Demonstre o corolário 5.193.

[Sugestão: Notando que uma coclique no complemento de um grafo bipartido tem no máximo dois elementos, encontre uma correspondência entre colorações de  $\overline{G}$  e coberturas de arestas de  $G$  para um grafo bipartido sem vértices isolados  $G$ .]

<sup>24</sup>Dado um grafo  $G = (V, E)$  o seu grafo linha  $L(G)$  é o grafo cujos vértices são as arestas de  $G$  e dois vértices (em  $L(G)$ ) são adjacentes sse as arestas de  $G$  que eles representam também o são.



**Exercício 5.202.** Demonstre o corolário 5.194.

**Exercício 5.203.** Um *grafo de intervalo* é um grafo  $G = (V, E)$  onde  $V = \{I_1, \dots, I_n\}$  é um conjunto finito de intervalos não-vazios em  $\mathbb{R}$  e dois intervalos distintos  $I_\alpha$  e  $I_\beta$  são adjacentes se e só se  $I_\alpha \cap I_\beta \neq \emptyset$ . Mostre que um grafo de intervalo é perfeito.

[Sugestão: Mostre que o seu complemento é um grafo de comparabilidade.]

## 6. MATRÓIDES

A teoria dos matróides pode ser vista como uma abordagem combinatória dos conceitos de álgebra linear como o de conjunto independente, base, dimensão entre outros. A teoria unifica conceitos de álgebra linear e da teoria de grafos.

**Definição 6.1.** Um *matróide*  $M = (X, \mathcal{I})$  consiste num conjunto finito  $X$  e numa família  $\mathcal{I}$  de subconjuntos de  $X$  que satisfaz os seguintes axiomas:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{I}$ ;
- (ii) se  $Y \in \mathcal{I}$  e  $Z \subseteq Y$  então  $Z \in \mathcal{I}$ ;
- (iii) se  $Y, Z \in \mathcal{I}$  e  $|Y| < |Z|$  então  $Y \cup \{x\} \in \mathcal{I}$  para algum  $x \in Z \setminus Y$ .

Um subconjunto  $Y$  de  $X$  é chamado de *independente* se  $Y \in \mathcal{I}$  e chamado de *dependente* se  $Y \notin \mathcal{I}$ .

**Exemplo 6.2.** Dado um conjunto finito de vectores  $X$  num dado espaço linear, podemos formar um matróide  $M = (X, \mathcal{I})$  tomando por  $\mathcal{I}$  o conjunto dos subconjuntos de  $X$  linearmente independentes. Em particular uma matriz  $A$  com entradas num corpo  $\mathbb{K}$  pode ser vista como um matróide  $M[A] = (X, \mathcal{I})$  onde  $X$  é o conjunto das suas colunas e  $\mathcal{I}$  é o conjunto dos conjuntos de colunas de  $A$  linearmente independentes. Um matróide deste tipo (ou isomorfo<sup>25</sup> a um tal matróide) é chamado de *matróide linear*.

**Exemplo 6.3.** Dado um grafo  $G = (V, E)$  se tomarmos o conjunto  $\mathcal{I} \subseteq 2^E$  formado pelos conjuntos de arestas  $E'$  tais que  $(V, E')$  forma uma floresta (i.e. um grafo acíclico) então  $M(G) = (E, \mathcal{I})$  é um matróide, chamado de *matróide cíclico de  $G$* . Qualquer matróide obtido deste modo, ou isomorfo a tal, é chamado de *matróide gráfico*.

**Observação 6.4.** Os matróides gráficos são matróides lineares. De facto, o matróide cíclico de um dado grafo pode ser visto como o matróide associado à sua matriz de incidência vista como uma matriz com entradas no corpo  $\mathbb{F}_2$  (corpo de ordem 2).

**Definição 6.5.** Dado um matróide  $(X, \mathcal{I})$  e um subconjunto  $Y$  de  $X$ , dizemos que um subconjunto independente  $B$  de  $Y$  é uma *base* de  $Y$  se  $B$  é maximal (em relação à ordem de inclusão) de entre os subconjuntos independentes de  $Y$ . Ou seja, para cada  $Z \in \mathcal{I}$  com  $B \subseteq Z \subseteq Y$  temos  $Z = B$ .

A uma base de  $X$  chamamos simplesmente *base*.

**Proposição 6.6.** A condição (iii) da definição dos conjuntos independentes pode ser substituída pela afirmação:

*Para qualquer subconjunto  $Y$  de  $X$ , quaisquer bases de  $Y$  têm a mesma cardinalidade.*

*Dem.* Exercício. □

**Definição 6.7.** Dado um matróide  $M = (X, \mathcal{I})$  e um subconjunto  $Y$  de  $X$ , definimos a *característica* de  $Y$ ,  $r_M(Y)$ , como sendo a cardinalidade das suas bases.

Consideremos o seguinte problema de optimização. Dada uma função peso  $w : X \rightarrow \mathbb{R}$  e uma família  $\mathcal{I}$  de subconjuntos de  $X$  queremos determinar um conjunto  $Y \in \mathcal{I}$  que maximize  $w(Y) := \sum_{y \in Y} w(y)$ .

Uma tentativa de resolução será usar um *algoritmo ganancioso* que consiste em começar com o conjunto vazio e ir seleccionando  $y_1, \dots, y_r$  sucessivamente como se segue. Se  $y_1, \dots, y_k$  já foram seleccionados, escolhemos  $y \in X$  tal que:

<sup>25</sup>Dois matróides  $(X, \mathcal{I})$  e  $(X', \mathcal{I}')$  dizem-se *isomorfos* se existir uma bijecção  $\phi : X \rightarrow X'$  tal que  $Y \in \mathcal{I}$  se e só se  $\phi(Y) \in \mathcal{I}'$ .

- (i)  $y \notin \{y_1, \dots, y_k\}$  e  $\{y_1, \dots, y_k, y\} \in \mathcal{I}$ ,
- (ii)  $y$  é de todos os elementos de  $X$  que satisfazem condição (i) aquele que tem peso  $w(y)$  máximo.

Paramos quando não existir elementos  $y$  de  $X$  que satisfazem a condição (i). Ou seja, paramos quando o conjunto obtido for uma base.

**Teorema 6.8.** *Seja  $X$  um conjunto finito e  $\mathcal{I}$  uma família de subconjuntos de  $X$  tal que*

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{I}$ ;
- (ii) se  $Y \in \mathcal{I}$  e  $Z \subseteq Y$  então  $Z \in \mathcal{I}$ ;

*Então  $(X, \mathcal{I})$  é um matróide se e só se o algoritmo ganancioso termina com um conjunto  $Y \in \mathcal{I}$  com peso  $w(Y)$  máximo, para cada função peso  $w : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ .*

*Dem.* Suponhamos que  $(X, \mathcal{I})$  é um matróide e seja  $w : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  uma função peso qualquer. Como os pesos são todos não-negativos o peso máximo será atingido em bases. Vamos chamar *ganancioso* a conjunto independente  $Y$  se estiver contido numa base de peso máximo. Basta mostrar que se  $Y$  é ganancioso e  $x \in X \setminus Y$  é tal que  $w(x)$  é o maior valor possível com  $Y \cup \{x\} \in \mathcal{I}$  então  $Y \cup \{x\}$  é também ganancioso. Como  $Y$  é ganancioso está contido numa base  $B$  de peso máximo. Se  $x \in B$  então  $Y \cup \{x\}$  também é ganancioso. Se  $x \notin B$ , então existe uma base  $B'$  contendo  $Y \cup \{x\}$ . Logo  $B' = (B \setminus \{x'\}) \cup \{x\}$  para algum  $x' \in B \setminus Y$ . Como  $w(x)$  é escolhido como sendo máximo,  $w(x) \geq w(x')$ , portanto  $w(B') \geq w(B)$ . Logo  $B'$  é uma base de peso máximo pelo que  $Y \cup \{x\}$  é ganancioso.

Suponhamos agora que  $(X, \mathcal{I})$  não é um matróide. Então existem  $Y, Z \in \mathcal{I}$  tais que  $|Y| < |Z|$  e  $Y \cup \{z\} \notin \mathcal{I}$  para qualquer  $z \in Z \setminus Y$ . Seja  $k := |Y|$ , consideremos a seguinte função peso  $w : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  dada por:

$$w(x) = \begin{cases} k+2 & \text{se } x \in Y \\ k+1 & \text{se } x \in Z \setminus Y \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus (Y \cup Z) \end{cases}$$

A solução obtida neste caso pelo algoritmo ganancioso será uma base com o mesmo peso que  $Y$  pois vai escolhendo primeiro todos os elementos de  $Y$  (que são os que têm peso maior) e depois como não podemos juntar elementos de  $Z \setminus Y$  resta-nos juntar elementos com peso nulo. Ou seja, o algoritmo leva-nos a uma base de peso  $|Y|(k+2) = k(k+2)$ . No entanto, qualquer base contendo  $Z$  tem peso de pelo menos  $w(Z) \geq |Z|(k+1) \geq (k+1)(k+1) > k(k+2)$ . Logo o algoritmo não produz, neste caso, uma solução optimal.  $\square$

### Axiomas equivalentes para matróides.

**Definição 6.9.** Dado um matróide  $(X, \mathcal{I})$ , um subconjunto de  $X$  diz-se um *circuito* se for um conjunto dependente minimal para ordem de inclusão. Ou seja,  $C$  é um circuito se  $C \notin \mathcal{I}$  e  $(Y \subsetneq C \Rightarrow Y \in \mathcal{I})$ .

Temos então que uma vez dado  $X$  e definidos os conjuntos independentes  $\mathcal{I}$ , podemos definir as bases  $\mathcal{B}$ , os circuitos  $\mathcal{C}$  e a função característica  $r : 2^X \rightarrow \mathbb{N}_0$ . No entanto, podemos recuperar os conjuntos independentes  $\mathcal{I}$  a partir das bases  $\mathcal{B}$ , dos circuitos  $\mathcal{C}$  ou da função característica  $r : 2^X \rightarrow \mathbb{N}_0$ .

De facto, temos a seguinte proposição.

**Proposição 6.10.** *Seja  $(X, \mathcal{I})$  um matróide e  $\mathcal{B}$  o conjunto das bases,  $\mathcal{C}$  o conjunto dos circuitos e  $r$  a função característica. Então o conjunto dos conjuntos independentes  $\mathcal{I}$  pode ser definido do seguinte modo:*

- (1)  $\mathcal{I} = \{Y : Y \subseteq B \text{ para algum } B \in \mathcal{B}\}$ ;
- (2)  $\mathcal{I} = \{Y : \text{não existe } C \in \mathcal{C} \text{ tal que } C \subseteq Y\}$ ;
- (3)  $\mathcal{I} = \{Y : r(Y) = |Y|\}$ .

Assim podemos definir o conceito de matróide alternativamente através uma axiomática apropriada para definir as bases ou os circuitos ou a função característica. Temos então os seguintes resultados.

**Teorema 6.11.** *Seja  $X$  um conjunto finito e  $\mathcal{B}$  uma família de subconjuntos de  $X$ . Definindo  $\mathcal{I} = \{Y : Y \subseteq B \text{ para algum } B \in \mathcal{B}\}$  temos que  $(X, \mathcal{I})$  é um matróide se e só se*

*B1  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ ;*

*B2 se  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  e  $x \in B_1 \setminus B_2$  então  $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$  para algum  $y \in B_2 \setminus B_1$ .*

*Dem.* Exercício. □

**Teorema 6.12.** *Seja  $X$  um conjunto finito e  $\mathcal{C}$  uma família de subconjuntos de  $X$ . Definindo  $\mathcal{I} = \{Y : \text{não existe } C \in \mathcal{C} \text{ tal que } C \subseteq Y\}$  temos que  $(X, \mathcal{I})$  é um matróide se e só se*

*C1  $\emptyset \notin \mathcal{C}$ ;*

*C2 se  $C_1 \in \mathcal{C}$  e  $C_2 \subseteq C_1$  então  $C_1 = C_2$ ;*

*C3 se  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  e  $e \in C_1 \cup C_2$  então existe  $C_3 \in \mathcal{C}$  tal que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ .*

*Dem.* Exercício. □

**Teorema 6.13.** *Dado um conjunto finito  $X$  e uma função  $r : 2^X \rightarrow \mathbb{N}_0$ . Definindo  $\mathcal{I} = \{Y : r(Y) = |Y|\}$  temos que  $(X, \mathcal{I})$  é um matróide se e só se*

*R1  $0 \leq r(Y) \leq |Y|$ ;*

*R2 se  $Y \subseteq Z$  então  $r(Y) \leq r(Z)$ ;*

*R3 se  $Y, Z \subseteq X$  então  $r(Y \cap Z) + r(Y \cup Z) \leq r(Y) + r(Z)$ .*

*Dem.* Exercício. □

**Exemplos de matróides e construções de novos matróides.** Já foram dados os exemplos dos matróides lineares e dos matróides gráficos.

Um matróide linear  $M = (X, \mathcal{I})$  é representado por um conjunto finito  $X$  de vectores num espaço linear. Os subconjuntos independentes são precisamente os subconjuntos linearmente independentes, a função característica é dada por  $r(Y) = \dim(\text{span}Y)$  e uma base  $B \subseteq X$  é um conjunto tal que  $r(B) = |B| = r(X)$ . Note-se que dois conjuntos distintos de vectores podem representar o mesmo matróide (a menos de isomorfismo). Um matróide  $M$  diz-se  $\mathbb{K}$ -representável se pode ser representado por um conjunto de vectores num espaço linear sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . O facto de um matróide poder ser representado num dado corpo não implica que possa ser representado em qualquer corpo.

Um matróide gráfico  $M = (E, \mathcal{I})$  é representado por um grafo  $G = (V, E)$ . Os subconjuntos independentes são os subconjuntos de arestas que induzem um subgrafo acíclico, os circuitos de  $M$  são os ciclos do grafo  $G$ , a função característica é dada por  $r(Y) = |V(G')| - 1$  onde  $G'$  é o subgrafo induzido por  $Y$  e uma base  $B \subseteq E$  induz uma floresta que cobre todos os vértices não isolados de  $G$ . Note-se que dois grafos distintos podem representar o mesmo matróide (a menos de isomorfismo).

Outra classe importante de matróides são os *matróides transversais*. Seja  $(X_1, \dots, X_m)$  uma família indexada de subconjuntos, não necessariamente distintos, de um conjunto finito  $X$ . Um conjunto  $Y \subseteq X$  diz-se um *transversal* (de  $X_1, \dots, X_m$ ) se existe em bijecção  $\phi : \{1, \dots, m\} \rightarrow Y$  tal que  $\phi(j) \in X_j$  para todo o  $j = 1, \dots, m$ . Um subconjunto de um transversal (de  $X_1, \dots, X_m$ ) diz-se um *transversal parcial* (de  $X_1, \dots, X_m$ ). Seja  $\mathcal{I}$  o conjunto dos transversais parciais de  $X_1, \dots, X_m$  então  $(X, \mathcal{I})$  forma um matróide. Um matróide obtido deste modo, ou isomorfo a tal, é chamado de *matróide transversal*. As bases de  $(X, \mathcal{I})$  são precisamente os transversais de  $X_1, \dots, X_m$ . Um matróide transversal pode ser representado por um garfo bipartido. Seja  $G = (V, E)$  um grafo bipartido cujo o conjunto vértices é  $V = \{1, \dots, m\} \cup X$  e o conjunto de arestas é  $E = \{[i, x] : 1 \leq i \leq m \text{ e } x \in X_i\}$ , temos que  $Y \subseteq X$  é um transversal parcial se e só se cobre um matching de  $G$  (i.e. existe um matching em  $G$  cujo cada aresta termina num elemento de  $Y$ ).

Entre os matróides transversais encontram-se os *matróides uniformes*. Dados dois inteiros não-negativos  $m$  e  $n$ , com  $m \leq n$ , chamamos matróide uniforme  $U_{m,n}$  a um matróide  $(X, \mathcal{I})$  com  $|X| = n$  e  $\mathcal{I} = \{Y \subseteq X : |Y| = m\}$ . Este pode ser visto como um matróide transversal associado a  $X$  com família indexada  $(X_1, \dots, X_m)$  com  $X_1 = \dots = X_m = X$ .

Podemos construir outros matróides através dos seguintes procedimentos.

**Proposição 6.14.** *Seja  $M$  um matróide sobre  $X$  com conjunto de bases  $\mathcal{B}$ . Então o conjunto  $\mathcal{B}^* := \{X \setminus B : B \in \mathcal{B}\}$  é o conjunto base de um matróide, denotado por  $M^*$ , sobre  $X$ . O matróide  $M^*$  é chamado de matróide dual de  $M$ .*

*Dem.* Exercício. □

O matróides duais de matróides gráficos são chamados de *matróides cográficos*. Os duais de matróides uniformes são também uniformes, de facto, temos  $U_{k,n}^* = U_{n-k,n}$ .

**Definição 6.15.** Seja  $M = (X, \mathcal{I})$  um matróide,  $Y$  um subconjunto de  $X$  e  $\mathcal{I}' := \{Z \subseteq Y : Z \in \mathcal{I}\}$ , então  $M' = (Y, \mathcal{I}')$  um matróide, chamado de *restrição* de  $M$  a  $Y$ . Se  $Y = X \setminus Z$  com  $Z \subseteq X$ , dizemos que  $M'$  é obtido por *eliminação* de  $Z$ , e denotamos  $M'$  por  $M \setminus Z$ .

**Definição 6.16.** Seja  $M = (X, \mathcal{I})$  um matróide,  $Z$  um subconjunto de  $X$ . Ao matróide  $(M^* \setminus Z)^*$  chamamos de *contração* de  $M$  por  $Z$  e denotamos por  $M/Z$ .

**Definição 6.17.** Um matróide  $M'$  obtido a partir de  $M$  por uma série de contrações e eliminações é chamado de *menor* de  $M$ .