3 ª Aula 2004.03.05 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

3.1 Noção de convergência no plano complexo.

Dada uma sucessão de números complexos z_n dizemos que z_n converge para o número complexo w se

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - w| = 0$$

e neste caso escrevemos $w = \lim_{n\to\infty} z_n$ ou $z_n \to w$.

Uma vez que $|z_n - w|$ é a distância entre os pontos z_n e w, a convergência de números complexos é equivalente à convergência de pontos no plano. Ou seja a topologia de $\mathbb{C}$ é equivalente à topologia em $\mathbb{R}^2$. Em particular uma sucessão z_n é convergente sse a sua parte real e sua parte imaginária formarem sucessões (reais) convergentes.

Exemplo 3.1 $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + i\frac{n}{2n+1} \to w = e + i\frac{1}{2}$.

Podemos também considerar séries de números complexos:

Dada a sucessão $u_n \in \mathbb{C}$, defina-se a sucessão (de somas parciais)

$$z_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Dizemos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge se a sucessão de somas parciais z_N for convergente e neste caso $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} z_N$.

Ainda no mesmo contexto, defina-se $a_n = \mathrm{Re}\,(u_n)$ e $b_n = \mathrm{Im}\,(u_n)$. Então temos

$$z_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} a_n + i\sum_{n=0}^{N} b_n.$$

Pelo que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge sse as séries reais $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ convergirem simultaneamente e neste caso

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i\sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Proposição 3.1 *Dada uma sucessão $u_n \in \mathbb{C}$ tal que a série (real de termos não negativos) $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ é convergente, então a série (complexa) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ é convergente.*

Demonstração. *Seja $a_n = \mathrm{Re}\,(u_n)$ e $b_n = \mathrm{Im}\,(u_n)$. Temos*

$$|a_n| \leqslant |u_n| \quad e \quad |b_n| \leqslant |u_n|,$$

donde, pelo critério da comparação, as séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n|,$$

são convergentes. Concluímos que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *são (absolutamente) convergentes e portanto* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *é convergente.* ■

3.2 Função exponencial

Definição 3.1

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

Com a função exponencial assim definida estendemos naturalmente a todo o plano complexo a função exponencial real de variável real já nossa conhecida dos cursos de cálculo elementar. Note-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n!} z^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |z|^n = e^{|z|}$, pelo que a série que define e^z é sempre convergente.

Proposição 3.2 *De acordo com definição 3.1 temos*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Demonstração. *De acordo com definição 3.1 temos*

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\theta)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \theta^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} \theta^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\,(i^2)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \\
&= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta
\end{aligned}$$

■

Consequentemente temos agora uma justificação mais profunda para a relação $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ e uma significação mais transcendente das fórmulas de Euler.

Com uma demonstração formalmente igual à que é conhecida para a função exponencial real de variável real, pode-se mostrar que [1]:

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}.$$

Temos então

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy}=e^xe^{iy} \\ &= e^x\cos y+ie^x\operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

3.3 Parte real e parte imaginária.

Tendo identificado os números complexos com os pontos do plano, facilmente se reconhece que através da mesma identificação, as funções complexas de variável complexa correspondem a funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Seja

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

(ou $f:D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$; i. e. podemos considerar funções que estão apenas definidas em subconjuntos do plano complexo). Define-se **parte real** de f por

$$u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+iy)$$

e **parte imaginária** de f por

$$v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+iy),$$

obtendo-se

$$f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$$

(onde $x\in\mathbb{R}$ e $y\in\mathbb{R}$). Estas funções, $u(x,y)$ e $v(x,y)$, são funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$. O campo (u,v):

$$(x,y)\to(u(x,y),v(x,y))$$

é uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$; pode ser identificado com a função f.

---

[1]

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}z_1^{n-k}z_2^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}z_1^{n-k}\frac{1}{k!}z_2^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z_1^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z_2^n \end{aligned}$$

Exemplo 3.2 *A parte real e parte imaginária de* $e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$ *são, respectivamente,*

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad e \quad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

Exemplo 3.3 *Parte real e parte imaginária de* z^3*:*

$$\begin{aligned} z^3 &= (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2 iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 \\ &= x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2 y - y^3\right), \end{aligned}$$

portanto a parte real e parte imaginária de z^3 *são, respectivamente, as funções*

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \quad e \quad v(x,y) = 3x^2 y - y^3.$$

3.4 Continuidade

De acordo com a identificação entre o plano complexo e $\mathbb{R}^2$, a noção de limite e continuidade para funções complexas de variável complexa é a mesma da para funções reais do plano no plano. Em particular, a título de listagem, temos:

Dizemos que w é o limite de $f(z)$ quando z tende para z_0, $\lim_{z\to z_0} f(z) = w$, se para todo z no domínio de f se tem

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : |z - z_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(z) - w| < \delta.$$

Se $\lim_{z\to z_0} f(z) = w$ e α é uma constante complexa, então $\lim_{z\to z_0} \alpha f(z) = \alpha w$.

Se $\lim_{z\to z_0} f_1(z) = w_1$ e $\lim_{z\to z_0} f_2(z) = w_2$, então $\lim_{z\to z_0} (f_1 + f_2)(z) = w_1 + w_2$.

Se $\lim_{z\to z_0} f_1(z) = w_1$ e $\lim_{z\to z_0} f_2(z) = w_2$, então $\lim_{z\to z_0} (f_1 f_2)(z) = w_1 w_2$.

Se $\lim_{z\to z_0} f_1(z) = w_1$ e $\lim_{z\to z_0} f_2(z) = w_2 \neq 0$, então $\lim_{z\to z_0} \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(z) = \frac{w_1}{w_2}$.

Se $\lim_{z\to z_0} g(z) = z_1$ e $\lim_{z\to z_1} f(z) = w$, então $\lim_{z\to z_0} (f \circ g)(z) = w$.

Uma função $f(z)$ é contínua em z_0 se $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Uma função $f(z)$ é contínua em $z = x + iy$ sse a sua parte real $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ e a sua parte imaginária $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ forem contínuas em (x,y).

A demonstração das propriedades dos limites e da continuidade de funções, pode-se fazer tanto de forma análoga aos resultados correspondentes para funções reais de variável real, como fazendo a separação das partes reais e imaginárias e utilizando os resultados de continuidade das funções definidas em $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, vamos mostrar que "Se $\lim_{z\to z_0} f_1(z) = w_1 = f_1(z_0)$ e $\lim_{z\to z_0} f_2(z) = w_2 = f_2(z_0)$, então $\lim_{z\to z_0} (f_1 f_2)(z) = w_1 w_2 = (f_1 f_2)(z_0)$".

Demonstração 1:

$$\begin{aligned} |f_1 f_2 - w_1 w_2| &= |f_1 f_2 - f_1 w_2 + f_1 w_2 - w_1 w_2| \\ &\leqslant |f_1| |f_2 - w_2| + |f_1 - w_1| |w_2| \end{aligned}$$

se $|f_2 - w_2| \to 0$ e $|f_1 - w_1| \to 0$ então $|f_1 f_2 - w_1 w_2| \to 0$.

Demonstração 2:

$$\begin{aligned} f_1 f_2 &= (u_1 + iv_1)(u_2 + iv_2) \\ &= u_1u_2 - v_1v_2 + i(u_1v_2 + v_1u_2) \end{aligned}$$

se f_1 e f_2 são contínuas então u_1, v_1, u_2 e v_2 são contínuas, então $u_1u_2 - v_1v_2$ e $u_1v_2 + v_1u_2$ são contínuas, então f_1f_2 é contínua.

A identificação das funções complexas de variável complexa com funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ permite-nos reduzir o estudo da continuidade das primeiras aos resultados conhecidos para as segundas. Observação semelhante não se aplica, contudo, no estudo da diferenciabilidade.

3.5 Definição de diferenciabilidade.

Definição 3.2 *Uma função $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é diferenciável (no sentido complexo) no ponto z interior ao domínio D sse existir (em $\mathbb{C}$) o seguinte limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Se f é diferenciável (no sentido complexo) no ponto z, então designa-se o número complexo

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

por derivada de f no ponto z.

Exemplo 3.4 *$z \to z$ é uma função diferenciável.*

$$\begin{aligned} (z)' &= \lim_{h\to 0} \frac{z+h-z}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exemplo 3.5 *$z \to z^2$ é uma função diferenciável. Esta conclusão é imediata do exemplo anterior e do facto de o produto de duas funções diferenciáveis ser diferenciável. Mas, como exercício, vamos fazer uma verificação directa*

$$\begin{aligned} \left(z^2\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{z^2 + 2zh + h^2 - z^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2z + h) \\ &= 2z. \end{aligned}$$

Exemplo 3.6 *Uma função constante é uma função diferenciável;*

$$f(z) = \mathit{const.} \Rightarrow f'(z) = 0.$$

No próximo exemplo vamos mostrar que esta definição de diferenciabilidade em $\mathbb{C}$ não é equivalente à definição que conhecemos em $\mathbb{R}^2$. Em particular funções muito simples de descrever no plano complexo podem não ser diferenciáveis apesar da suas partes reais e imaginárias serem regulares.

Exemplo 3.7 *$z \to \overline{z}$ não é uma função diferenciável.*
Seja $f(z) = \overline{z}$ e considere-se a razão incremental

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{\overline{z+h} - \overline{z}}{h} \\ &= \frac{\overline{z} + \overline{h} - \overline{z}}{h} \\ &= \frac{\overline{h}}{h}.\end{aligned}$$

Escrevendo h na forma polar $h = \rho e^{i\theta}$, observamos que fazer h tender para zero (aproximar-se da origem; trata-se de um limite no plano) é fazer ρ tender para zero (independentemente da coordenada θ), mas

$$\begin{aligned}\frac{\overline{h}}{h} &= \frac{\rho\overline{e^{i\theta}}}{\rho e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}} \\ &= e^{-i2\theta}.\end{aligned}$$

Esta expressão mostra imediatamente que o limite $\lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}$ não existe, porque a função $\frac{\overline{h}}{h}$ tem limites direccionais são distintos. De facto se fizermos h tender para zero ao longo da direcção horizontal ($\theta = 0$) obtemos o resultado 1 e se fizermos h tender para zero ao longo da direcção vertical ($\theta = \frac{\pi}{2}$) obtemos o resultado -1.

Note-se que a função (correspondente) $(x, y) \to (x, -y)$ é linear e portanto diferenciável enquanto função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Mostra este exemplo que a noção de diferenciabilidade no sentido complexo é mais restritiva do que a noção de diferenciabilidade real das funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Comparando esta nova definição (em $\mathbb{C}$) com a definição de diferenciabilidade em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{R}^2$ observamos que em qualquer dos três casos a definição de diferenciabilidade corresponde à "boa " aproximação por funções lineares:

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)\,h + \circ(h)$$

onde $\circ(h)$ é um termo que dividido pelo módulo (ou norma) de h tende para zero quando h tende para zero. A diferença está na interpretação do termo linear $f'(z)\,h$ (produto de complexos, produto de reais ou produto de uma matriz por um vector [2]).

[2] Correspondendo respectivamente a uma aplicação linear no espaço vectorial unidimensional de corpo complexo $\mathbb{C}$; no espaço vectorial unidimensional de corpo real $\mathbb{R}$; e no espaço vectorial bidimensional de corpo real $\mathbb{R}^2$.