

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

## 4.1 Combinação de funções diferenciáveis

Relembremos da última aula a definição de diferenciabilidade no sentido complexo: uma função  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é diferenciável (no sentido complexo) no ponto  $z$  interior ao domínio  $D$  sse existir (em  $\mathbb{C}$ ) o seguinte limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Soma, produto, divisão (supondo a divisão bem definida), composição de funções diferenciáveis é diferenciável. As demonstrações são formalmente idênticas às demonstrações dos resultados correspondentes para funções reais de variável real. Vamos listar estes resultados:

Se  $f(z)$  é diferenciável no ponto  $z_0$  e  $\alpha$  é uma constante complexa, então o produto  $\alpha f$  é uma função diferenciável e

$$(\alpha f)'(z_0) = \alpha f'(z_0).$$

Se  $f(z)$  e  $g(z)$  são diferenciáveis no ponto  $z_0$ , então a soma  $f+g$  é uma função diferenciável e

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0).$$

Se  $f(z)$  e  $g(z)$  são diferenciáveis no ponto  $z_0$ , então o produto  $fg$  é uma função diferenciável e

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

Se  $f(z)$  e  $g(z)$  são diferenciáveis no ponto  $z_0$ , e  $g(z_0) \neq 0$ , então o quociente  $\frac{f}{g}$  é uma função diferenciável e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

Se  $g(z)$  é diferenciável no ponto  $z_0$  e  $f(z)$  é diferenciável no ponto  $g(z_0)$ , então a função composta  $f \circ g$  é diferenciável no ponto  $z_0$  e

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) g'(z_0).$$

**Exemplo 4.1** Se  $F(z) = f(z^2)$  e  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{C}$ , então  $F(z)$  é diferenciável e  $F'(z) = 2zf'(z^2)$ .

Se  $G(z) = (g(z))^2$  e  $g$  é diferenciável em  $\mathbb{C}$ , então  $G(z)$  é diferenciável e  $G'(z) = 2g(z)g'(z)$ .

Pelos enunciados acima expostos facilmente se conclui que qualquer polinómio em  $z$  (com coeficientes complexos) é uma função diferenciável em  $\mathbb{C}$ . Tal como qualquer função racional  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  (quociente entre dois polinómios) é uma função diferenciável em todo o seu domínio (todo plano complexo excepto os zeros do denominador;  $\{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$ ).

**Exemplo 4.2**  $f(z) = \frac{z^9 + (3+i5)z^5 + \pi z^3 + i\sqrt{2}z^2 + 2}{4+z^2}$  é uma função diferenciável em  $\mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i\}$ .

Contudo existem muitas funções formalmente simples que não são diferenciáveis no sentido complexo, como se mostrou com o exemplo  $f(z) = \bar{z}$ .

## 4.2 Equações de Cauchy-Riemann. Condições necessárias para a diferenciabilidade

Se  $f$  é diferenciável num certo ponto  $z_0$  então existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Note-se que  $h \in \mathbb{C}$  e portanto  $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$  converge para  $f'(z_0)$  independentemente da forma com que  $h$  converge para 0; isto é independentemente do percurso que  $h$  toma quando converge para 0. Em particular os limites direccionais têm de iguais segundo todas as direcções. Portanto, o valor  $f'(z_0)$  pode ser calculado fazendo  $h$  tender para zero segundo o eixo real (direcção horizontal), ou segundo o eixo imaginário (direcção vertical), obtendo-se o mesmo resultado (na hipótese da existência da derivada  $f'(z_0)$ ). Então (com  $x_0 = \operatorname{Re} z_0$  e  $y_0 = \operatorname{Im} z_0$ ) se  $f$  é diferenciável em  $z_0$ ,

1.

$$f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{t}$$

2.

$$f'(z_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + i(y_0 + t)) - f(x_0 + iy_0)}{it}$$

onde  $t$  é uma variável real (muda). Separando a parte real e a parte imaginária obtemos (com  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$  e  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ ):

1.

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) + iv(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

2. Analogamente

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + t) + iv(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{it} \\ &= \frac{1}{i} \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Conclusão: se  $f = u + iv$  é diferenciável no ponto  $z = x_0 + iy_0$ , então

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\end{aligned}$$

Estas são designadas por **equações de Cauchy-Riemann**.

Mostrámos então o seguinte Teorema.

**Teorema 4.1** *Se  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  é uma função diferenciável (no sentido complexo) no ponto  $z_0 = x_0 + iy_0$ , então as funções  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann no ponto  $(x_0, y_0)$ .*

**Exemplo 4.3** *Vamos confirmar que a função  $f(z) = \bar{z}$  não é diferenciável:*

$f(x + iy) = u + iv$ , com  $u = x$  e  $v = -y$ ;  $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$ ; as equações de Cauchy-Riemann não são satisfeitas (apesar de  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ).

**Observação 4.1** *De acordo com as equações de Cauchy-Riemann, no caso de existir (esta é uma hipótese muito forte) a derivada de uma função complexa de variável complexa poder ser calculada, a partir das suas partes reais e imaginárias, usando qualquer das seguintes fórmulas:*

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad f' = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{ou} \quad f' = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

### 4.3 Condições suficientes para a diferenciabilidade.

**Teorema 4.2** *Seja  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u$  a parte real,  $v$  a parte imaginária de  $f$  e  $z_0 = x_0 + iy_0$  ( $x_0 = \operatorname{Re} z_0$  e  $y_0 = \operatorname{Im} z_0$ ) um ponto interior a  $D$ .*

*Se  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  é tal que  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em  $(x_0, y_0)$  e as suas derivadas parciais são funções contínuas neste mesmo ponto  $(x_0, y_0)$ , então  $f$  é diferenciável no ponto  $z_0 = x_0 + iy_0$ .*

**Observação 4.2** *Vamos utilizar apenas o facto de  $u$  e  $v$  serem diferenciáveis em  $(x_0, y_0)$ , o que é consequência de terem derivadas parciais contínuas neste ponto; de acordo com um teorema bem conhecido da análise em  $\mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração.**  $h = t + ik$ ,  $t = \operatorname{Re} h$  e  $k = \operatorname{Im} h$ ;  $|h| = \sqrt{t^2 + k^2} = \|(t, k)\|$

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{1}{h} [u(x_0 + t, y_0 + k) + iv(x_0 + t, y_0 + k) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)] \\ &= \frac{1}{h} [u(x_0 + t, y_0 + k) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + t, y_0 + k) - v(x_0, y_0))]\end{aligned}$$

usando a diferenciabilidade de  $u$  e  $v$  no ponto  $(x_0, y_0)$ , vem<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)t + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(|h|) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{h} i \left( \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)t + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(|h|) \right) \\ &= \frac{1}{h} \left[ t \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} + i \left( t \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\partial v}{\partial y} \right) + o(|h|) \right] \end{aligned}$$

omitindo o ponto  $(x_0, y_0)$  onde todas as derivadas parciais são calculadas. Utilizando as equações de Cauchy-Riemann, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{1}{h} \left[ t \frac{\partial u}{\partial x} - k \frac{\partial v}{\partial x} + i \left( t \frac{\partial v}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + o(|h|) \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ (t + ik) \frac{\partial u}{\partial x} + (-k + it) \frac{\partial v}{\partial x} + o(|h|) \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ (t + ik) \frac{\partial u}{\partial x} + i(ik + t) \frac{\partial v}{\partial x} + o(|h|) \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{o(|h|)}{h}. \end{aligned}$$

O termo  $\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$  não depende de  $h$  e  $\frac{o(|h|)}{h} = \frac{o(|h|) \frac{|h|}{|h|}}{|h|}$  converge para zero (quando  $h \rightarrow 0$ ) porque  $\left| \frac{|h|}{h} \right| = 1$ . Pelo que existe o limite  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ . ■

**Exemplo 4.4** A função exponencial  $e^z$  é diferenciável em todo o plano complexo. Temos  $e^z = u + iv$ , com  $u = e^x \cos y$  e  $v = e^x \sin y$ ;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Portanto as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas e as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  são contínuas, concluindo-se que  $e^z$  é diferenciável em todo o plano complexo e

$$\begin{aligned} (e^z)' &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= e^x \cos y + i e^x \sin y \\ &= e^z. \end{aligned}$$

**Exercício 4.1** Mostre que se a derivada de uma função de variável complexa é nula num conjunto aberto, então a função é constante nesse conjunto.

---

<sup>1</sup> $o(|h|)$  designa uma função desconhecida  $g$  (neste caso  $g$  depende de  $z_0$  e de  $h$ ) que satisfaz a seguinte propriedade

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{g}{|h|} = 0.$$

## 4.4 Funções analíticas.

**Observação 4.3** Comparem-se os Teoremas 4.1 e 4.2. Estes resultados não são exactamente o recíproco um do outro. Contudo, é possível demonstrar que  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  é diferenciável num aberto  $D$  sse  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy -Riemann e são de classe  $C^1$  nesse mesmo aberto (identificando naturalmente os subconjuntos  $\mathbb{C}$  e de  $\mathbb{R}^2$ ).

**Definição 4.1** Seja  $D \subset \mathbb{C}$  um conjunto aberto,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  é **holomorfa** (ou **analítica**)<sup>2</sup> sse for diferenciável em todos os pontos de  $D$  e sua derivada  $f'$  for contínua em  $D$ <sup>3</sup>.

Consequência imediata desta definição e dos Teoremas 4.1 e 4.2 é que:  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  é analítica num aberto  $D$  sse  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy -Riemann e são de classe  $C^1$ . De facto se  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  é diferenciável, então

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

pelo que, se a derivada  $f'$  for contínua,  $u$  e  $v$  são de classe  $C^1$ .

**Definição 4.2** Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  é **holomorfa** (ou **analítica**) em  $F \subset D$  sse existe um conjunto aberto  $A$  tal que  $F \subset A$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  é analítica. (mais precisamente, se a restrição de  $f$  a  $A \cap D$  admite uma extensão a  $A$  que seja analítica no sentido da definição 4.1)

**Definição 4.3** Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  é **holomorfa** (ou **analítica**) em  $z \in D$  se é analítica em  $\{z\}$  de acordo com a definição 4.2.

Imediatamente se reconhece que, de acordo com os resultados semelhantes para funções contínuas e pontualmente diferenciáveis, a soma, o produto, o quociente e a composição de funções analíticas é ainda uma função analítica no interior do seu domínio. Esta observação permite reconhecer funções analíticas sem necessidade de efectuar cálculos.

Assim reconhecemos que qualquer polinómio é uma função<sup>4</sup> analítica em  $\mathbb{C}$ . Do mesmo modo qualquer função racional (quociente de polinómios) é analítica no seu domínio (o plano complexo excepto os zeros do denominador). Por outro lado, pelo Exemplo 4.4, a função exponencial é também analítica em todo plano complexo. Com base nestas funções é possível construir uma miríade de funções analíticas.

---

<sup>2</sup>Alguns autores definem de forma distinta as funções holomorfas (definições semelhantes à aqui enunciada) e as funções analíticas (definições ligadas ao desenvolvimento em séries de potências). Contudo à posteriori mostram que as funções são holomorfas sse são analíticas.

<sup>3</sup>Usualmente definem-se as funções holomorfas (ou as analíticas) sem pedir a continuidade da derivada da função, mostrando-se à posteriori que qualquer função holomorfa (analítica) tem derivada contínua. Esta abordagem usual implica uma teoria mais elaborada do que a que expomos neste curso. Aquilo que se perde é apenas que neste curso não se mostra que a definição usual é equivalente à aqui utilizada.

<sup>4</sup>As funções analíticas em todo plano complexo designam-se por **funções inteiras**.

**Exemplo 4.5** A função  $f(z) = e^{\frac{z^2+1}{z-3i}}$  é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{3i\}$ . De facto, a função  $z \rightarrow \frac{z^2+1}{z-3i}$  é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{3i\}$ , porque é uma função racional, e  $f(z)$  é a composição desta função com a função exponencial; portanto a composição de funções analíticas. A sua derivada calcula-se de acordo com as regras mencionadas:

$$f'(z) = e^{\frac{z^2+1}{z-3i}} \left( \frac{z^2+1}{z-3i} \right)' = e^{\frac{z^2+1}{z-3i}} \frac{2z(z-3i) - (z^2+1)}{(z-3i)^2} = \frac{z^2 - 6iz - 1}{(z-3i)^2} e^{\frac{z^2+1}{z-3i}}$$

**Exemplo 4.6** As funções  $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  e  $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  são analíticas (soma e composição de funções analíticas). De acordo com as fórmulas de Euler, quando restringidas ao eixo real estas funções coincidem com as funções coseno e seno, respectivamente. Pelo que é natural definir

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad e \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

O calculo da derivada destas (novas) funções definidas em todo plano complexo obtém-se pela regra da derivação da soma e da composição de funções:

$$\begin{aligned} (\cos z)' &= \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)' = \frac{(e^{iz})' + (e^{-iz})'}{2} = \frac{ie^{iz} + (-i)e^{-iz}}{2} \\ &= i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\sin z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sin z)' &= \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)' = \frac{(e^{iz})' - (e^{-iz})'}{2i} = \frac{ie^{iz} - (-i)e^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.7** A analiticidade da função  $f(z) = |z^2 - \bar{z}^2| + i(z^2 + \bar{z}^2)$  já não pode ser estudada do mesmo modo uma vez que a função  $z \rightarrow \bar{z}$  não é analítica. Mas, com  $z = x + iy$ , vem  $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$  e, portanto,

$$f(x + iy) = |4ixy| + i2(x^2 - y^2) = 4|xy| + i2(x^2 - y^2).$$

Designando por  $u$  e  $v$  as partes real e imaginária de  $f$ , respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 4 \frac{|xy|}{x} \quad \text{se } x \neq 0 \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -4y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 4 \frac{|xy|}{y} \quad \text{se } y \neq 0 \quad e \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -4x. \end{aligned}$$

Pelo que as equações de Cauchy Riemann não são verificadas para  $xy > 0$ ; mas são satisfeitas na região definida por  $xy < 0$  e as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  são contínuas nesta região aberta. Concluímos, portanto que a função deste exemplo é analítica no aberto:  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \text{ Re } z < 0\}$ .