5 ª Aula 2004.09.22 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

5.1 Funções elementares

Para além dos polinómios, funções racionais e função exponencial, é útil conhecer outras funções analíticas definidas no plano complexo à custa da função exponencial e que generalizam funções conhecidas da análise real.

Definição 5.1 *Para $z \in \mathbb{C}$, define-se*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad e \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

Imediatamente reconhecemos as fórmulas de Euler e as seguintes relações:

$$\cos z = \operatorname{ch}(iz) \tag{5.1}$$

e

$$\operatorname{sen} z = \frac{1}{i} \operatorname{sh}(iz).$$

Percebe-se agora, no contexto da análise complexa, porque a cada relação entre funções trigonométricas está associada uma relação entre funções hiperbólicas correspondentes, que é idêntica a menos de alguns sinais. Por exemplo:

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1 \quad \text{corresponde a} \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Da definição de exponencial podemos obter a representação em séries de potências destas funções trigonométricas; por exemplo:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n)!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)!} z^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, ou utilizando as relações 5.1, obtemos

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{e} \quad \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

A derivada destas funções pode ser obtida da derivada da exponencial, por exemplo:

$$\begin{aligned}(\cos z)' &= \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{(e^{iz})' + (e^{-iz})'}{2} \\ &= \frac{ie^{iz} + (-i)\, e^{-iz}}{2} = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \\ &= -\frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\operatorname{sen} z.\end{aligned}$$

Obtemos assim as seguintes regras já conhecidas dos cursos de análise real:

$$(\cos z)' = -\operatorname{sen} z \qquad (\operatorname{sen} z)' = \cos z$$

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z \qquad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z.$$

Outras funções (trigonométricas) úteis devido ao seu significado geométrico são

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \qquad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}.$$

e as suas correspondentes hiperbólicas

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \qquad \operatorname{coth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\operatorname{ch} z} \qquad \operatorname{cosech} z = \frac{1}{\operatorname{sh} z}.$$

Outro aspecto que convém notar é de que os zeros das funções $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ se situam sobre o eixo real e portanto são os zeros destas funções que conhecemos da análise real. De facto:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{i2z} = 1 \\ &\Leftrightarrow i2z = i2k\pi \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z = k\pi \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\cos z &= 0 \Leftrightarrow e^{i2z} = -1 \\ &\Leftrightarrow i2z = i\pi + i2k\pi \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Somando, multiplicando, dividindo e compondo funções elementares obtemos novas funções elementares que são analíticas no seu domínio e podem ser derivadas segundo as regras habituais:

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (f\,g)' = f'\,g + f\,g',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2} \qquad , (f \circ g)' = f' \circ g\; g'.$$

5.2 A função exponencial como transformação conforme

A função exponencial e^z pode ser visualizada como uma transformação do plano no plano, estudando a imagem por esta função das rectas verticais e das rectas horizontais.

Cada recta horizontal com coordenada y é transformada numa semi-recta com extremidade na origem e ângulo y com o eixo real:

$$t + iy \to e^t (\cos y + i \operatorname{sen} y) ,$$

em que

$$t \in]-\infty, +\infty[\to e^t \in]0, +\infty[.$$

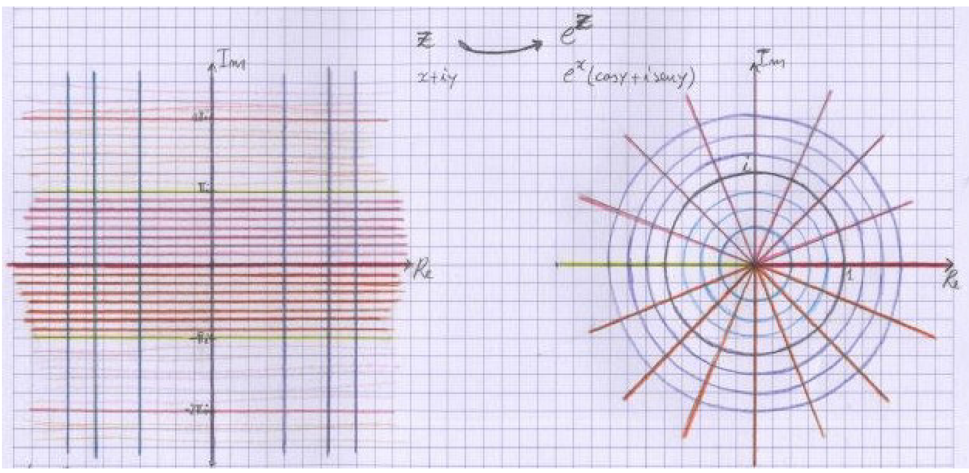
Em particular, a recta real é transformada na semi-recta dos reais positivos (a exponencial real é sempre positiva). As rectas horizontais correspondentes às coordenadas y e $y+2\pi$ têm a mesma imagem (período 2π: $y \to y + 2\pi$).

Cada recta vertical com abcissa x é transformada numa circunferência centrada na origem e com raio e^x:

$$x + it \to e^x (\cos t + i \operatorname{sen} t) .$$

Em particular, o eixo imaginário ($x = 0$) é transformado na circunferência de raio 1; rectas verticais à esquerda deste eixo ($x < 0$) são transformadas em circunferências de raio menor que 1; rectas verticais à direita do eixo imaginário ($x > 0$) são transformadas em circunferências de raio maior que 1.

Note-se que para qualquer número complexo z, tem-se $e^z \neq 0$; de facto, $|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x e^{iy}| = |e^x|\,|e^{iy}| = e^x \neq 0$. Por outro lado $e^{z+i2\pi} = e^z$, pelo que a função exponencial complexa não é injectiva (ao contrário do que acontecia com a exponencial real).



5.3 Logaritmo de um número complexo

Como a função e^z não é injectiva, não existe função inversa de e^z. Podemos, no entanto, considerar

$$w = \log z,$$

como as soluções de

$$e^w = z.$$

Temos então, com

$$\begin{aligned} w &= \alpha + i\beta \\ z &= \rho e^{i\theta}, \end{aligned}$$

i. e. $\alpha = \operatorname{Re} z$, $\beta = \operatorname{Im} z$, $\rho = |z|$ e $\theta = \arg z$,

$$\begin{aligned} e^{\alpha+i\beta} &= \rho e^{i\theta} \\ e^{\alpha} e^{i\beta} &= \rho e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{array}{lcll} e^{\alpha} = \rho & \text{e} & e^{i\beta} = e^{i\theta} & \\ \alpha = \log \rho & \text{e} & \beta = \theta + k2\pi, & \text{com } k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Definição 5.2 *Seja $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\rho = |z|$ e θ definido por $z = \rho e^{i\theta}$ e $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$. Então* ***logaritmo*** *de z é o seguinte conjunto de valores:*

$$\log z = \log \rho + i\left(\theta + k2\pi\right), \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z}$$

onde $\log \rho$ *é a função logaritmo usual (função com valores reais definida nos reais positivos).*

Portanto,

$$\log z = \log |z| + i \arg(z).$$

Definição 5.3 *Seja $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\rho = |z|$ e θ definido por $z = \rho e^{i\theta}$ e $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$. Então a função complexa de variável complexa* ***ramo principal do logaritmo*** *é definida por*

$$\log z = \log \rho + i\theta$$

onde $\log \rho$ *é a função logaritmo usual (função definida nos reais positivos com valores reais).*

Note-se que esta função sendo facilmente descrita em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \log z &= \log\left(\rho e^{i\theta}\right) \\ &= \log \rho + i\theta, \end{aligned}$$

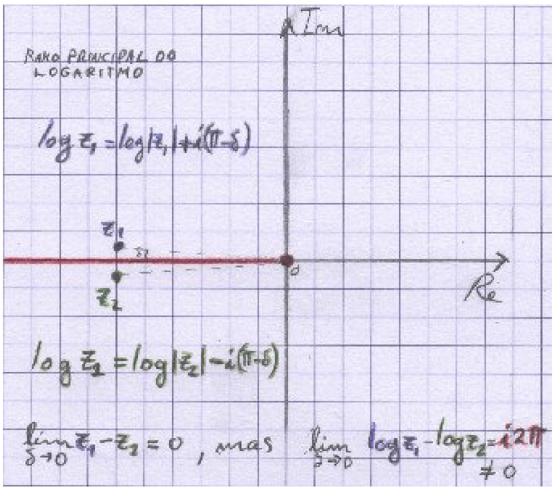
tem uma expressão mais elaborada em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \log z &= \log(x + iy) \\ &= \log \sqrt{x^2 + y^2} + i\,\Theta(x, y), \end{aligned}$$

onde

$$\Theta(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} & \text{, se } \; y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} & \text{, se } \; y < 0 \\ 0 & \text{, se } \; y = 0 \; \text{ e } x > 0 \\ \pi & \text{, se } \; y = 0 \; \text{ e } x < 0 \end{cases}.$$

O conjunto dos pontos de descontinuidade desta função é $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ e } \operatorname{Re} z \leqslant 0\}$; que é portanto a linha de descontinuidade do ramo principal do logaritmo.



É possível e muitas vezes conveniente definir outros ramos do logaritmo. A definição é sempre

$$\log z = \log\left(\rho e^{i\theta}\right) = \log\rho + i\theta$$

variando apenas os valores possíveis de θ. Por exemplo podemos impor $\theta \in [0, 2\pi[$ obtendo uma função descontínua no semieixo real positivo, $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ e } \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$.

Portanto, ao considerar outros ramos do logaritmo, apenas muda o modo como se calcula θ e em particular a linha de descontinuidade considerada. Do ponto de vista prático, bastará indicar uma linha de descontinuidade (que vá da origem para o infinito) para se obter a função logaritmo correspondente (dum ponto de vista mais rigoroso será também necessário indicar o valor de logaritmo num ponto exterior à linha descontinuidade e impor certas condições a esta linha). Por exemplo:

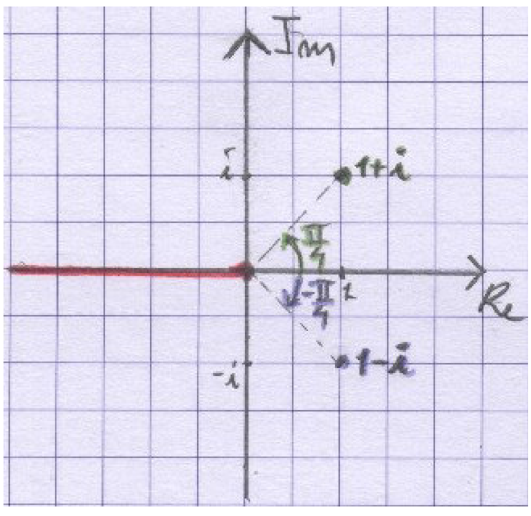
1º Exemplo: A linha de descontinuidade do ramo principal do logaritmo é

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ e } \operatorname{Re} z \leqslant 0\},$$

ou seja $\quad \{z = -t : t \in [0, +\infty[\}$

temos então, $\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\dfrac{\pi}{4}$

e $\quad \log(1-i) = \log\sqrt{2} - i\dfrac{\pi}{4}$



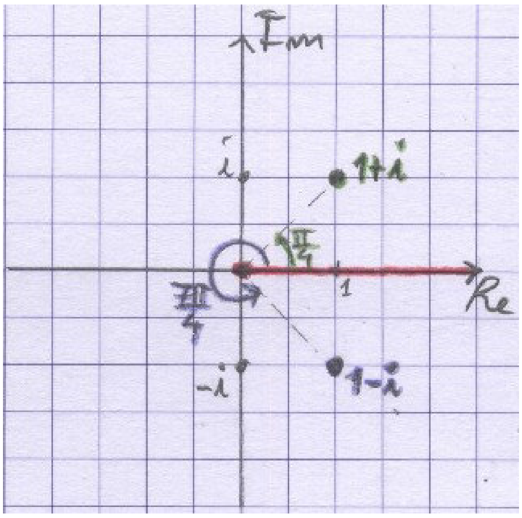
2º Exemplo: Para o ramo do logaritmo com linha de descontinuidade

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ e } \operatorname{Re} z \geqslant 0\},$$

ou seja $\{z = t : t \in [0, +\infty[\}$

temos então, $\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$

e $\log(1-i) = \log\sqrt{2} + i\frac{7\pi}{4}$

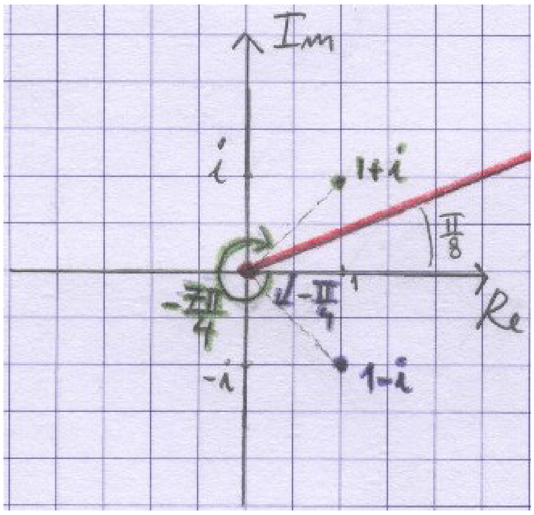


3º Exemplo: Para o ramo do logaritmo com linha de descontinuidade

$$\left\{z = t\left(\cos\tfrac{\pi}{8} + i\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{8}\right) : t \in [0, +\infty[\right\},$$

temos então, $\log(1+i) = \log\sqrt{2} - i\frac{7\pi}{4}$

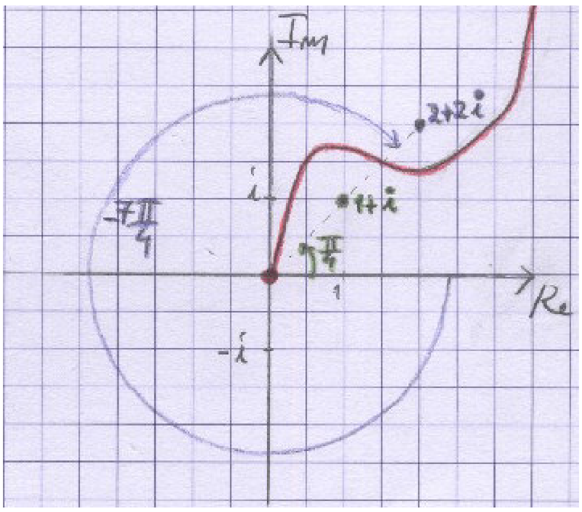
e $\log(1-i) = \log\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}$



4º Exemplo: Podemos também considerar ramos com linhas de descontinuidade mais gerais:

$$\{z = t\,(\cos\gamma(t) + i\operatorname{sen}\gamma(t)) : t \in [0, +\infty[\},$$

onde γ é qualquer função e contínua de $[0, +\infty[$ em $\mathbb{R}$.



Também neste caso

$$\log z = \log\left(\rho e^{i\theta}\right) = \log\rho + i\theta,$$

mas agora com

$$\theta \in [\gamma(\rho), \gamma(\rho) + 2\pi[\,.$$

No exemplo do desenho

$$\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

e $$\log(2+2i) = \log 2 - i\frac{7\pi}{4}.$$