6 ª Aula 2004.09.24 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

6.1 Equações de Cauchy Riemann em coordenadas polares. Analiticidade e derivada do logaritmo

Com objectivo de deduzir a analiticidade do logaritmo complexo, vamos exprimir as equações de Cauchy Riemann em coordenadas polares.

Dada uma função complexa de variável complexa, podemos descreve-la em termos de coordenadas polares da mesma forma que o fazemos em coordenadas cartesianas:

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$
$$f\left(\rho e^{i\theta}\right) = U(\rho,\theta) + iV(\rho,\theta).$$

Ou seja

$$U(\rho,\theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad \text{e} \quad V(\rho,\theta) = v(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Pela regra de derivação, da função composta temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}.\end{aligned}$$

Temos também as seguintes relações para a função mudança de coordenadas (ρ,θ) [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos\theta \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\rho} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{\rho}$$

Note-se que estas equações são válidas apenas fora da linha de descontinuidade (por exemplo $\rho > 0$ e $\theta \in\,]-\pi,\pi[$, para o ramo principal).

1

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right. \to \tfrac{\partial}{\partial x} \to \left\{\begin{array}{l} 1 = \frac{\partial\rho}{\partial x}\cos\theta - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} \\ 0 = \frac{\partial\rho}{\partial x}\mathrm{sen}\,\theta + \rho\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} \end{array}\right. \to \frac{\text{resolvendo em}}{\text{ordem a } \frac{\partial\theta}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial\rho}{\partial x}} \to \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\rho}{\partial x} = \cos\theta \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\rho} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right. \to \tfrac{\partial}{\partial x} \to \left\{\begin{array}{l} 0 = \frac{\partial\rho}{\partial y}\cos\theta - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} \\ 1 = \frac{\partial\rho}{\partial y}\mathrm{sen}\,\theta + \rho\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} \end{array}\right. \to \frac{\text{resolvendo em}}{\text{ordem a } \frac{\partial\theta}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial\rho}{\partial y}} \to \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial\rho}{\partial y} = \mathrm{sen}\,\theta \\ \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{\rho} \end{array}\right.$$

As equações de Cauchy-Riemann escrevem-se então

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$
$$\frac{\partial U}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho} = \frac{\partial V}{\partial \rho}\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}$$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$
$$\frac{\partial U}{\partial \rho}\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho} = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\cos\theta + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}$$

Multiplicando a primeira por $\cos\theta$ e somando a segunda multiplicada por $\operatorname{sen}\theta$, i. e.
$(1)\cos\theta + (2)\operatorname{sen}\theta$, obtemos (usando $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$)
$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Da mesma forma, multiplicando a primeira por $\cos\theta$ e somando a segunda multiplicada por $\operatorname{sen}\theta$, i. e.
$(1)\operatorname{sen}\theta - (2)\cos\theta$, obtemos
$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \rho}$$
Facilmente verificamos que estas duas equações são equivalentes à equações de Cauchy Riemann em coordenadas cartesianas (fora da linha de descontinuidade). Obtivemos assim as **equações de Cauchy Riemann em coordenadas polares**:
$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \rho} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\\ \frac{\partial V}{\partial \rho} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\end{aligned}$$
Por outro lado, se $f(z)$ é diferenciável, temos
$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h},$$
pelo que, fazendo o limite direccional segundo a direcção do próprio ponto z (i. e. se $z = \rho e^{i\theta}$, faz-se $h = te^{i\theta}$, com t real a tender para zero), obtemos
$$\begin{aligned} f'(z) = f'\left(\rho e^{i\theta}\right) &= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\rho e^{i\theta} + te^{i\theta}\right) - f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{te^{i\theta}}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f\left((\rho+t)\,e^{i\theta}\right) - f\left(\rho e^{i\theta}\right)}{t}e^{-i\theta}\\ &= e^{-i\theta}\lim_{t\to 0}\frac{U(\rho+t,\theta) + iV(\rho+t,\theta) - U(\rho,\theta) - iV(\rho,\theta)}{t}\\ &= e^{-i\theta}\left(\lim_{t\to 0}\frac{U(\rho+t,\theta) - U(\rho,\theta)}{t} + i\lim_{t\to 0}\frac{V(\rho+t,\theta) - iV(\rho,\theta)}{t}\right)\\ &= e^{-i\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} + i\frac{\partial V}{\partial \rho}\right).\end{aligned}$$

Utilizando as equações de Cauchy Riemann obtemos ainda as seguintes fórmulas para a derivada:

$$f'\left(\rho e^{i\theta}\right) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} + i\frac{\partial V}{\partial \rho}\right), \qquad f'\left(\rho e^{i\theta}\right) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} - i\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) =$$

$$f'\left(\rho e^{i\theta}\right) = \frac{e^{-i\theta}}{\rho}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta} - i\frac{\partial U}{\partial \theta}\right), \qquad f'\left(\rho e^{i\theta}\right) = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta} + i\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)$$

Exemplo 6.1 *Apliquemos as equações de Cauchy Riemann em coordenadas polares à função logaritmo.*

Temos $U = \log \rho$ *e* $V = \theta$*. Então*

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Concluímos (equações de Cauchy - Riemann e continuidade das derivadas parciais) que fora da linha de descontinuidade a (qualquer ramo da) função logaritmo é analítica (por exemplo o ramo principal do logaritmo é uma função analítica no domínio definido por $\rho > 0$ *e* $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$*).*

A derivada pode ser obtida por

$$\begin{aligned}(\log z)' &= e^{-i\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho} + i\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) \\ &= e^{-i\theta}\frac{1}{\rho} \\ &= \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{z}\end{aligned}$$

6.2 Exponenciação complexa.

Definição 6.1 *Dados* $w \in \mathbb{C}$ *e* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *define-se*

$$z^w = e^{w \log z}$$

Se interpretarmos $\log z$ como um conjunto de valores, então também z^w será um conjunto de valores que diferem entre si pela multiplicação de um factor da forma

$$e^{ik2\pi w} \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 6.2 *O símbolo* $(1+i)^i$ *designa os valores:*

$$\begin{aligned}(1+i)^i &= e^{i\log(1+i)}\\ &= e^{i\left(\log\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)\right)}\\ &= e^{i\log\sqrt{2}}e^{-\left(\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)}\\ &= e^{-\left(\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)}\left(\cos\log\sqrt{2}+i\,\mathrm{sen}\log\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

Facilmente se verifica[2] que, com esta notação, $z^{-1} = e^{-\log z} = \dfrac{1}{z}$ e $z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log z} = \sqrt[n]{z}$.

Se interpretarmos $\log z$ como um determinado ramo do logaritmo, então z^w será também uma função que em geral é descontínua sobre determinada linha de descontinuidade.

Note-se, que se fixarmos o ramo do logaritmo, temos[3]

$$z^{w_1}z^{w_2} = e^{w_1\log z}e^{w_2\log z} = e^{(w_1+w_2)\log z} = z^{w_1+w_2}.$$

Fixando um ramo da função, podemos calcular a sua derivada fora da linha de descontinuidade:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}z^w &= \frac{d}{dz}e^{w\log z}\\ &= e^{w\log z}w\frac{d}{dz}\log z\\ &= z^w w\frac{1}{z}\\ &= wz^{w-1}.\end{aligned}$$

6.3 Funções trigonométricas inversas

Usando a logaritmo complexo é possível estender as funções trigonométricas inversas aos números complexos, obtendo-se fórmulas surpreendentes que permitem a dedução das fórmulas de derivação conhecidas da análise real.

---

[2] De facto

$$z^{-1} = e^{-\log z} = \frac{1}{e^{\log z}} = \frac{1}{z}$$

e (mesmo interpretando $\sqrt[n]{z}$ e $z^{\frac{1}{n}}$ como um conjunto de valores, uma vez que os elementos de ambos conjuntos diferem por factores da forma $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, com $k \in \mathbb{Z}$)

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(e^{\frac{1}{n}\log z}\right)^n = e^{\log z} = z.$$

[3] No entanto se interpretarmos z^{w_1} e z^{w_2} como conjunto de valores, então em geral $z^{w_1}z^{w_2} \neq z^{w_1+w_2}$; de facto (adoptando definições evidentes para a multiplicação de conjuntos) se $z=-1$ e $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$, temos

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}} &= \{-i,i\}\{-i,i\} = \{-1,1\}\\ &\neq \{-1\} = (-1)^1 = (-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Exemplo 6.3 *Consideremos o caso* $\operatorname{arcsen} z$. *Tomando*

$$w = \operatorname{arcsen} z$$

o ponto de partida será

$$\operatorname{sen} w = z.$$

Utilizando a definição da função de variável complexa $\operatorname{sen} w$, *temos*

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z.$$

Donde

$$e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0$$

e multiplicando por e^{iw}, *obtemos*

$$e^{i2w} - 2ize^{iw} - 1 = 0,$$

que é uma equação do segundo grau em e^{iw}. *Concluímos (interpretando* $\sqrt{\cdot}$ *e* $\log$ *como um conjunto de valores ou como um ramo predeterminado destas funções)*

$$\begin{aligned} e^{iw} &= iz + \sqrt{(iz)^2 + 1} \\ &= iz + \sqrt{1 - z^2} \end{aligned}$$

e

$$iw = \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Portanto, devemos tomar

$$\operatorname{arcsen} z = \frac{1}{i} \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Podemos ver $\operatorname{arcsen} z$ *como um conjunto de valores ou como uma função fixando o ramo das funções* $\sqrt{\cdot}$ *e* $\log$.

Fixando um ramo da função, podemos calcular a sua derivada fora das linhas de descontinuidade:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \operatorname{arcsen} z &= \frac{d}{dz}\frac{1}{i} \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \\ &= \frac{1}{i}\frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}}\frac{d}{dz}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \\ &= \frac{1}{i}\frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}}\left(i + \frac{1}{2}\frac{-2z}{\sqrt{1 - z^2}}\right) \\ &= \frac{1}{i}\frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}}\frac{i\sqrt{1 - z^2} - z}{\sqrt{1 - z^2}} \\ &= \frac{1}{iz + \sqrt{1 - z^2}}\frac{\sqrt{1 - z^2} + iz}{\sqrt{1 - z^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \end{aligned}$$

Exemplo 6.4 *Consideremos o caso* $\operatorname{arctg} z$*. Tomando*

$$w = \operatorname{arctg} z,$$

o ponto de partida será

$$\operatorname{tg} w = z.$$

Então

$$\frac{\operatorname{sen} w}{\cos w} = z$$

e utilizando a definição destas funções de variável complexa,

$$\frac{\left(e^{iw} - e^{-iw}\right)/2i}{\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)/2} = z.$$

Resolvendo em ordem a e^{iw}*, temos sucessivamente*

$$e^{iw} - e^{-iw} = iz\left(e^{iw} + e^{-iw}\right),$$

$$e^{iw}\left(1 - iz\right) = \left(1 + iz\right)e^{-iw},$$

$$e^{i2w} = \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{\left(1+iz\right)^2}{1+z^2},$$

donde

$$i2w = \log\frac{1+iz}{1-iz}.$$

Portanto, devemos tomar[4]

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz}.$$

Podemos ver $\operatorname{arctg} z$ *como um conjunto de valores ou como uma função fixando o ramo da função* $\log$*.*

Fixando um ramo da função, podemos calcular a sua derivada fora das linhas de descontinuidade:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\operatorname{arctg} z &= \frac{d}{dz}\frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz}\\
&= \frac{1}{2i}\frac{1-iz}{1+iz}\frac{d}{dz}\frac{1+iz}{1-iz}\\
&= \frac{1}{2i}\frac{1-iz}{1+iz}\frac{i\left(1-iz\right)+i\left(1+iz\right)}{\left(1-iz\right)^2}\\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{1+iz}\frac{2i}{1-iz}\\
&= \frac{1}{1+z^2}.
\end{aligned}$$

[4] Ou

$$\operatorname{arctg} z = \frac{-i}{2}\log\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{-i}{2}\log\frac{i-z}{i+z} = \frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}.$$