

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

## 7.1 Funções complexas de variável real

Antes de introduzirmos o integral de funções complexas de *variável complexa*, vamos começar por estudar as funções complexas de *variável real* e a integração destas funções. Estas funções identificam-se exactamente e naturalmente com as funções com variável real e valores em  $\mathbb{R}^2$ . De facto dada uma função  $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , esta corresponde à função vectorial  $\mathbf{g} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{onde} \quad x(t) = \operatorname{Re} F(t) \quad \text{e} \quad y(t) = \operatorname{Im} F(t).$$

Portanto o estudo da diferenciabilidade destas funções não difere do estudo feito em cadeiras de análise real. De facto temos

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(t+s) - F(t)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{x(t+s) + iy(t+s) - (x(t) + iy(t))}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{x(t+s) - x(t)}{s} + i \frac{y(t+s) - y(t)}{s} \\ &= x'(t) + iy'(t), \end{aligned}$$

tal como

$$\begin{aligned} \mathbf{g}'(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{g}(t+s) - \mathbf{g}(t)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{x(t+s) - x(t)}{s}, \frac{y(t+s) - y(t)}{s} \right) \\ &= (x'(t), y'(t)). \end{aligned}$$

Convém, contudo, estudar a diferenciabilidade da composição de funções de variável real com funções de variável complexa.

Com uma demonstração formalmente idêntica à do teorema da derivação da função composta para funções reais de variável real, obtemos a seguinte proposição:

**Proposição 7.1** *Sejam  $G : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , diferenciável;  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , analítica em  $D$ ; tais que  $G(I) \subset D$ . Então  $f \circ G$  é diferenciável em  $I$  e*

$$(f \circ G)'(t) = f'(G(t)) G'(t).$$

**Exemplo 7.1** *Temos  $\frac{d}{dt} e^{it} = ie^{it}$*

$$(f(z) = e^z \text{ e } G(t) = it).$$

**Exemplo 7.2** *Temos  $\frac{d}{dt} \operatorname{sen}(|t|t + it^2) = 2(|t| + it) \cos(|t|t + it^2)$*

$$(f(z) = \operatorname{sen} z \text{ e } G(t) = |t|t + it^2).$$

## 7.2 Integração de funções complexas de variável real

### 7.2.1 Definição

Vamos agora definir o conceito de integral de funções complexas de *variável real* para que mais à frente definamos o integral de funções complexas de *variável complexa*.

Seja<sup>1</sup>  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que a sua parte real e a sua parte imaginária sejam funções reais de variável real integráveis<sup>2</sup> no intervalo  $[a, b]$ . Então  $F$  diz-se integrável em  $[a, b]$  e define-se o integral de  $F$  em  $[a, b]$  através da seguinte fórmula:

$$\int_a^b F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} F(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} F(t) dt.$$

### Exemplo 7.3

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^{it} dt &= \int_0^2 (\cos t + i \operatorname{sen} t) dt = \int_0^2 \cos t dt + i \int_0^2 \operatorname{sen} t dt \\ &= [\operatorname{sen} t]_0^2 + i [-\cos t]_0^2 = \operatorname{sen} 2 + i(-\cos 2 + 1). \end{aligned}$$

### 7.2.2 Linearidade

Sejam  $\alpha, \beta$  dois números complexos e as funções  $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  integráveis, então

$$\int_a^b (\alpha F(t) + \beta G(t)) dt = \alpha \int_a^b F(t) dt + \beta \int_a^b G(t) dt.$$

De facto

$$\begin{aligned} \int_a^b (F(t) + G(t)) dt &= \int_a^b \operatorname{Re}(F(t) + G(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(F(t) + G(t)) dt \\ &= \int_a^b (\operatorname{Re} F(t) + \operatorname{Re} G(t)) dt + i \int_a^b (\operatorname{Im} F(t) + \operatorname{Im} G(t)) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} F(t) dt + \int_a^b \operatorname{Re} G(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} F(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} G(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} F(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} F(t) dt + \int_a^b \operatorname{Re} G(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} G(t) dt \\ &= \int_a^b F(t) dt + \int_a^b G(t) dt. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a < b$ .

<sup>2</sup>Neste curso, podemos considerar, indiferentemente, sempre o integral de Lebesgue ou sempre o de Riemann.

e

$$\begin{aligned}
\alpha \int_a^b F(t) dt &= (\operatorname{Re} \alpha + i \operatorname{Im} \alpha) \left( \int_a^b \operatorname{Re} F(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} F(t) dt \right) \\
&= \operatorname{Re} \alpha \int_a^b \operatorname{Re} F(t) dt - \operatorname{Im} \alpha \int_a^b \operatorname{Im} F(t) dt + \\
&\quad + i \left( \operatorname{Re} \alpha \int_a^b \operatorname{Im} F(t) dt + \operatorname{Im} \alpha \int_a^b \operatorname{Re} F(t) dt \right) \\
&= \int_a^b (\operatorname{Re} \alpha \operatorname{Re} F(t) - \operatorname{Im} \alpha \operatorname{Im} F(t)) dt + \\
&\quad + i \int_a^b (\operatorname{Re} \alpha \operatorname{Im} F(t) + \operatorname{Im} \alpha \operatorname{Re} F(t)) dt \\
&= \int_a^b \operatorname{Re}(\alpha F(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(\alpha F(t)) dt \\
&= \int_a^b \alpha F(t) dt.
\end{aligned}$$

### 7.2.3 Regra de Barrow

Sendo  $F'(t)$  a derivada contínua em  $[a, b]$  da função  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , i. e.  $F'(t) = \left(\frac{d}{dt} \operatorname{Re} F(t)\right) + i \left(\frac{d}{dt} \operatorname{Im} F(t)\right)$ , sendo  $\left(\frac{d}{dt} \operatorname{Re} F(t)\right)$  e  $\left(\frac{d}{dt} \operatorname{Im} F(t)\right)$  funções reais de variável real contínuas. Então

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a).$$

De facto

$$\begin{aligned}
\int_a^b F'(t) dt &= \int_a^b \frac{d}{dt} \operatorname{Re} F(t) dt + i \int_a^b \frac{d}{dt} \operatorname{Im} F(t) dt \\
&= \operatorname{Re} F(b) - \operatorname{Re} F(a) + i (\operatorname{Im} F(b) - \operatorname{Im} F(a)) \\
&= \operatorname{Re} F(b) + i \operatorname{Im} F(b) - \operatorname{Re} F(a) - i \operatorname{Im} F(a) \\
&= F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

### Exemplo 7.4

$$\int_0^2 e^{it} dt = \left[ \frac{e^{it}}{i} \right]_0^2 = \frac{e^{i2} - 1}{i} = \operatorname{sen} 2 + i(1 - \cos 2)$$

### 7.2.4 Comparação de integrais

**Proposição 7.2** *Seja  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  integrável ( $a < b$ , números reais), então*

$$\left| \int_a^b F(t) dt \right| \leq \int_a^b |F(t)| dt.$$

Note-se que  $\int_a^b |F(t)| dt$  é o integral de uma função real de variável real.

**Demonstração.** Sejam  $\rho > 0$  e  $\theta \in \mathbb{R}$ , tais que  $\int_a^b F(t) dt = \rho e^{i\theta}$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b F(t) dt \right| &= \rho = \operatorname{Re} \rho \\ &= \operatorname{Re} \left( e^{-i\theta} \int_a^b F(t) dt \right) = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta} F(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} (e^{-i\theta} F(t)) dt, \end{aligned}$$

notando que  $\operatorname{Re} z \leq |z|$ , vem

$$\left| \int_a^b F(t) dt \right| \leq \int_a^b |e^{-i\theta} F(t)| dt.$$

Mas  $|e^{-i\theta} F(t)| = |e^{-i\theta}| |F(t)|$  e  $|e^{-i\theta}| = 1$ , portanto

$$\left| \int_a^b F(t) dt \right| \leq \int_a^b |F(t)| dt.$$

■

### Exemplo 7.5

$$\left| \int_0^2 e^{it} dt \right| \leq \int_0^2 |e^{it}| dt = \int_0^2 dt = 2.$$

*De facto*

$$\begin{aligned} \left| \int_0^2 e^{it} dt \right| &= |\operatorname{sen} 2 + i(1 - \cos 2)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 2 + (1 - \cos 2)^2} \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^2 2 + \cos^2 2 + 1 - 2 \cos 2} = \sqrt{2 - 2 \cos 2} \\ &\leq \sqrt{4} = 2. \end{aligned}$$

## 7.3 Definição do Integral de funções complexas de variável complexa

Dado um caminho  $\mathbf{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , temos duas funções coordenadas  $x$  e  $y$ , i. e.  $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t))$ . Podemos identificar este caminho com um caminho  $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  definido por  $z(t) = x(t) + iy(t)$ . E vice-versa. Em particular para caminhos diferenciáveis temos  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$  tal como  $\mathbf{g}'(t) = (x'(t), y'(t))$ . Isto é existe uma identificação total entre caminhos em  $\mathbb{R}^2$  e em  $\mathbb{C}$ .

Recordemos alguns conceitos e definições conhecidos da cadeira de AMIII: curvas e caminhos no plano ( $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C}$ ) *regulares*; *seccionalmente regulares*; *simples*; *simples e fechadas*; *orientação de curvas*; *concatenação de curvas orientadas*. *Região delimitada por uma curva fechada* (como um conjunto compacto).

Diz-se que *uma curva fechada  $C$  envolve um ponto  $z$* , se este estiver no interior da região delimitada por  $C$ .

Estamos agora em condições de introduzir a seguinte definição:

**Definição 7.1** Dado um caminho seccionalmente regular e simples  $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ( $a < b$ ), este define a curva  $C = z([a, b])$  percorrida uma vez num certo sentido. Considere-se uma função complexa de variável complexa  $f : C \rightarrow \mathbb{C}$  (para a qual exista em  $\mathbb{C}$  o integral do lado direito da igualdade abaixo; por exemplo se  $f$  é contínua em  $C$ ). Então o integral de  $f$  ao longo do caminho  $z$  (ou da curva  $C$  no sentido considerado) é definido por

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \frac{dz}{dt}(t) dt.$$

Nesta definição, e de acordo com a notação habitual, a letra  $z$  assume dois significados distintos: no integral do lado esquerdo é uma variável muda tal como a letra  $t$  ou é no integral do lado direito; no integral do lado direito  $z$  é um caminho regular que representa uma curva  $C$  percorrida num certo sentido.

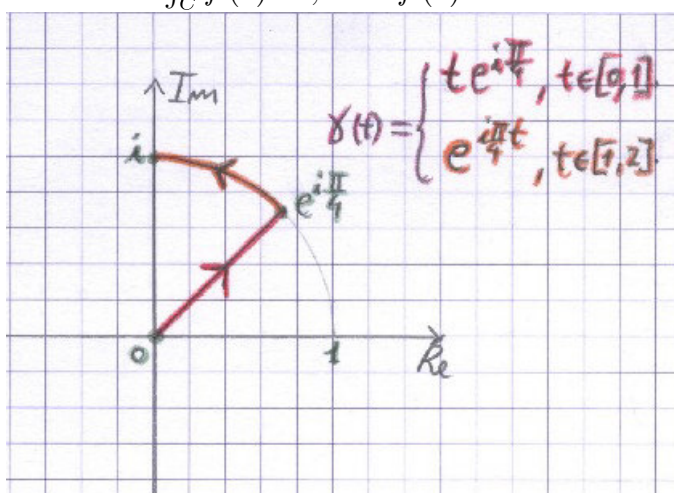
Este integral generaliza o integral de funções reais de variável real: se  $z(t) = t$ , com  $t \in [a, b]$ , i. e.  $I = z([a, b])$  é um segmento de recta sobre o eixo real, então  $z'(t) = 1$  e  $\int_I f(z) dz = \int_a^b f(t) dt$ .

Note-se também, que a derivada do caminho pode não estar definida num número finito de pontos. Contudo os limites laterais da derivada,  $\frac{dz}{dt}(t-)$  e  $\frac{dz}{dt}(t+)$ , existem (com valores em  $\mathbb{C}$ ) em toda a curva  $C$  e coincidem com as derivadas laterais (porque  $z(t)$  é seccionalmente regular em  $[a, b]$ ).

**Exemplo 7.6** Considere-se o caminho

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{4}t}, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ e^{i\frac{\pi}{4}t}, & \text{se } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

e  $C = \gamma([0, 2])$ . Vamos calcular  $\int_C f(z) dz$ , com  $f(z) = z^2$ .



Temos

$$\gamma'(t) = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{4}}, & \text{se } 0 < t < 1 \\ i\frac{\pi}{4}e^{i\frac{\pi}{4}t}, & \text{se } 1 < t < 2 \end{cases}.$$

Então de acordo com a definição de integral vem,

$$\begin{aligned}
\int_C z^2 dz &= \int_0^2 \gamma^2(t) \gamma'(t) dt = \int_0^1 (e^{i\frac{\pi}{4}t})^2 e^{i\frac{\pi}{4}} dt + \int_1^2 (e^{i\frac{\pi}{4}t})^2 i\frac{\pi}{4} e^{i\frac{\pi}{4}t} dt \\
&= \int_0^1 e^{i\frac{\pi}{2}t^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dt + i\frac{\pi}{4} \int_1^2 e^{i\frac{\pi}{2}t} e^{i\frac{\pi}{4}t} dt = e^{i\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 t^2 dt + i\frac{\pi}{4} \int_1^2 e^{i\frac{3\pi}{4}t} dt \\
&= e^{i\frac{3\pi}{4}} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 + i\frac{\pi}{4} \left[ \frac{4}{3\pi i} e^{i\frac{3\pi}{4}t} \right]_1^2 = \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{3} + \frac{1}{3} (e^{i\frac{3\pi}{2}} - e^{i\frac{3\pi}{4}}) \\
&= \frac{1}{3} e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\frac{i}{3}.
\end{aligned}$$

Mas a um caminho  $z(t) = x(t) + iy(t)$  no plano complexo corresponde um caminho  $\mathbf{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , no plano real, definido por  $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t))$ . Temos então (onde  $\cdot$  designa o produto interno em  $\mathbb{R}^2$ ), de forma abreviada<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned}
\int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv) (dx + idy) = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy - v dx) \\
&= \int_C (u, -v) \cdot d\mathbf{g} + i \int_C (v, u) \cdot d\mathbf{g}.
\end{aligned}$$

onde  $\int_C (u, -v) \cdot d\mathbf{g}$  e  $\int_C (v, u) \cdot d\mathbf{g}$  são respectivamente, os integrais de linha dos campos<sup>4</sup>  $(u, -v)$  e  $(v, u)$  ao longo do caminho  $\mathbf{g}$  (em  $\mathbb{R}^2$ ).

Esta igualdade permite-nos deduzir propriedades dos integrais de funções complexas de variável complexa  $\int_C f(z) dz$  das propriedades correspondentes dos integrais de linha de campos vectoriais. Em particular temos  $\int_C f(z) dz = -\int_{-C} f(z) dz$  (onde  $-C$  representa a curva  $C$  percorrida no sentido contrário) e  $|\int_C f(z) dz|$  é independente do caminho simples (e seccionalmente regular) que percorre  $C$ .

Se  $C$  é a concatenação de duas curvas regulares  $C_1$  e  $C_2$ , i.e.  $C = C_1 + C_2$ , tem-se

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

De forma análoga para o integral ao longo de curvas que são a concatenação de  $n$  curvas regulares.

---

<sup>3</sup>Ou de forma menos abreviada

$$\begin{aligned}
\int_C f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) \frac{dz}{dt}(t) dt = \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) (x'(t) + iy'(t)) dt \\
&= \int_a^b (u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)) dt + i \int_a^b (u(x(t), y(t)) y'(t) + v(x(t), y(t)) x'(t)) dt \\
&= \int_a^b (u(x(t), y(t)), -v(x(t), y(t))) \cdot (x'(t), y'(t)) dt + i \int_a^b (v(x(t), y(t)), u(x(t), y(t))) \cdot (x'(t), y'(t)) dt \\
&= \int_a^b (u(\mathbf{g}(t)), -v(\mathbf{g}(t))) \cdot \mathbf{g}'(t) dt + i \int_a^b (v(\mathbf{g}(t)), u(\mathbf{g}(t))) \cdot \mathbf{g}'(t) dt \\
&= \int_C (u, -v) \cdot d\mathbf{g} + i \int_C (v, u) \cdot d\mathbf{g}
\end{aligned}$$

<sup>4</sup>Funções de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ .