

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

8.1 Integração de funções derivadas

O próximo resultado dá-nos, sob certas condições, um processo expedito para o cálculo de alguns destes integrais de variável complexa. É a extensão da fórmula de Barrow para funções de variável complexa, no entanto o problema da existência de primitivas é ainda mais intricado do que no caso real; este facto limita bastante a aplicabilidade deste resultado.

Proposição 8.1 *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto, f analítica em D e $C \subset D$ uma curva seccionalmente regular com o ponto inicial z_0 e final z_1 . Então*

$$\int_C f'(z) dz = f(z_1) - f(z_0)$$

Demonstração. *Seja $z(t)$ com $t \in [a, b]$ uma parametrização (seccionalmente regular) da curva orientada C . De acordo com a definição 4.1 f' é uma função contínua, pelo que (pela fórmula de Barrow para funções seccionalmente contínuas)*

$$\begin{aligned} \int_C f'(z) dz &= \int_a^b f'(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} [f(z(t))] dt \\ &= f(z(b)) - f(z(a)) \\ &= f(z_1) - f(z_0) \end{aligned}$$

■

Exemplo 8.1 *Considere-se o integral considerado no Exemplo 7.6. Como $\left(\frac{z^3}{3}\right)' = z^2$ temos*

$$\int_C z^2 dz = \frac{i^3}{3} - 0 = \frac{-i}{3}.$$

Exemplo 8.2 *Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ uma curva seccionalmente regular com o ponto inicial ω_0 e final ω_1 . Então*

$$\int_{\Gamma} \cos z dz = \operatorname{sen} \omega_1 - \operatorname{sen} \omega_0.$$

Exemplo 8.3 *Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ uma curva seccionalmente regular com o ponto inicial ω_0 e final ω_1 . Então para $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$,*

$$\int_{\Gamma} z^n dz = \frac{\omega_1^{n+1}}{n+1} - \frac{\omega_0^{n+1}}{n+1},$$

se a curva Γ não passar pelo ponto $z = 0$, no caso de $n < -1$.

Exemplo 8.4 Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ uma curva seccionalmente regular com o ponto inicial ω_0 e final ω_1 . Então para $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$,

$$\int_{\Gamma} (\xi - z)^n d\xi = \frac{(\omega_1 - z)^{n+1}}{n+1} - \frac{(\omega_0 - z)^{n+1}}{n+1},$$

se a curva Γ não passar pelo ponto $\xi = z$, no caso de $n < -1$.

Exemplo 8.5 Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ uma curva seccionalmente regular com o ponto inicial ω_0 e final ω_1 . Então, para um ramo do logaritmo tal que a sua linha de descontinuidade não passe pelo caminho que liga ω_0 a ω_1 (se tal for possível),

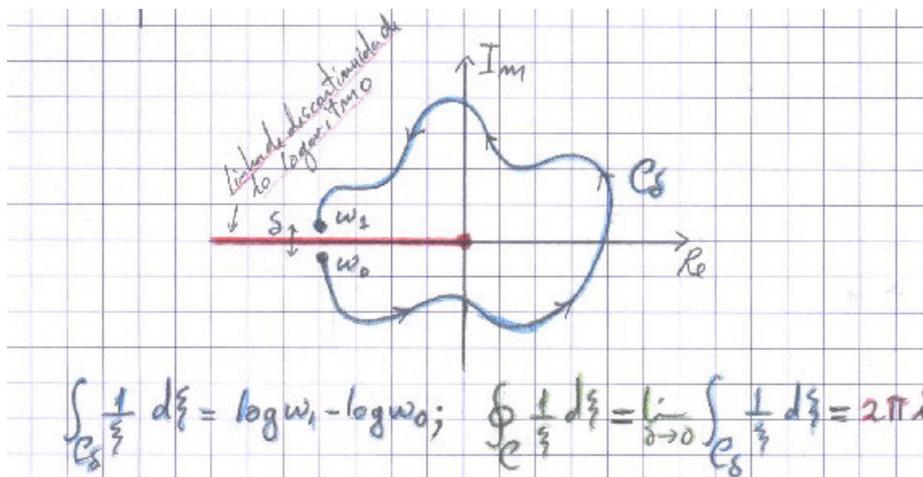
$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\xi - z} d\xi = \log(\omega_1 - z) - \log(\omega_0 - z).$$

Exemplo 8.6 Seja C uma curva simples fechada e seccionalmente regular que não passa sobre o ponto z .

$$\oint_C \frac{1}{\xi - z} d\xi = 0 \quad \text{se } C \text{ não envolve } z,$$

$$\oint_C \frac{1}{\xi - z} d\xi = i2\pi \quad \text{se } C \text{ envolve } z \text{ no sentido directo.}$$

Este resultado obtém-se do exemplo anterior fazendo o limite $\omega_1 \rightarrow \omega_0$ (escolhendo um ramo do logaritmo adequado).



8.2 O Teorema de Cauchy

Notação 8.1 Se C é uma curva fechada seccionalmente regular escreve-se $\oint_C f(z) dz$ com o mesmo significado de $\int_C f(z) dz$ apenas para reforçar a afirmação de que C é uma curva fechada.

Teorema 8.2 (de Cauchy) Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo, f analítica em D e $C \subset D$ uma curva seccionalmente regular fechada. Então

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

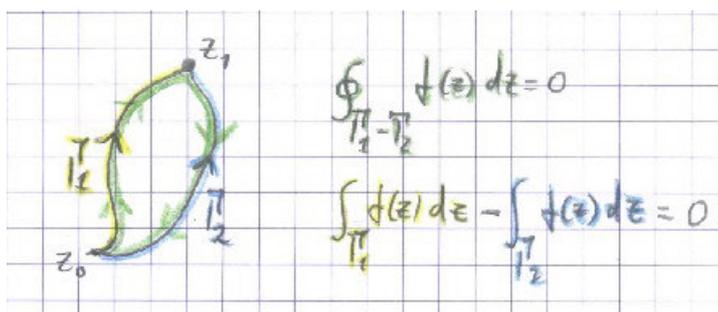
Demonstração. De acordo com a relação $\int_C f(z) dz = \int_C (u, -v) \cdot d\mathbf{g} + i \int_C (v, u) \cdot d\mathbf{g}$, obtida na última aula, basta mostrar que os campos $(u, -v)$ e (v, u) são fechados (onde $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$). Ou seja $u, v \in C^1$ e

$$\frac{\partial}{\partial y} u = \frac{\partial}{\partial x} (-v) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} v = \frac{\partial}{\partial x} u,$$

que são exactamente as equações de Cauchy - Riemann. (note-se que u e v são de classe C^1 uma vez que pela nossa definição de função analítica $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ é uma função contínua). ■

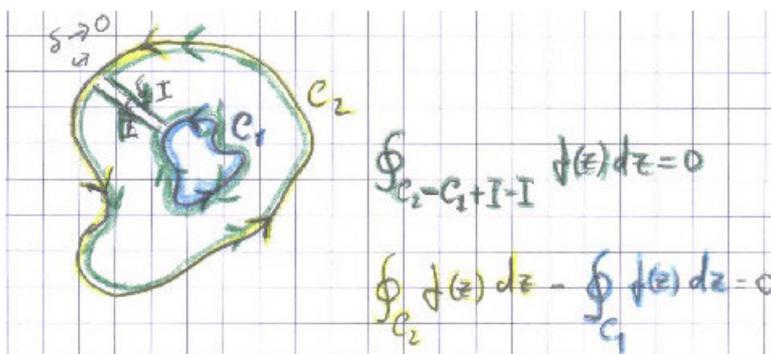
Corolário 8.3 Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo, f analítica em D , Γ_1 e Γ_2 duas curvas seccionalmente regulares contidas em D com o mesmos pontos inicial z_0 e final z_1 . Então

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$



Corolário 8.4 Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, analítica em D , e C_1 e C_2 duas curvas fechadas homotópicas em D ¹ (percorridas no mesmo sentido). Então

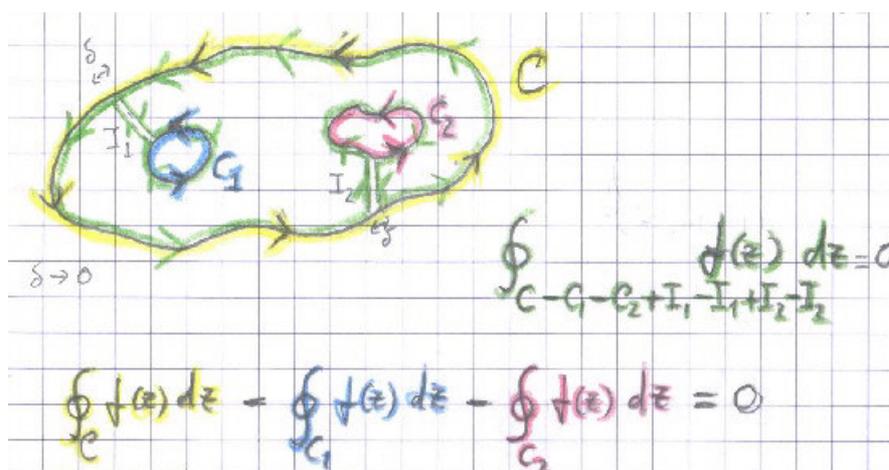
$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$



¹Que podem, por deformação contínua, transformar-se uma na outra sem sair do conjunto D .

Corolário 8.5 (Integrais de funções analíticas em regiões multiplamente conexas) Considere-se curvas seccionalmente regulares, fechadas e simples, C, C_1, C_2, \dots, C_N , percorridas no sentido positivo, tais que C_1, C_2, \dots, C_N estão contidas no interior da região delimitada pela curva C e as regiões limitadas por cada uma das curvas C_1, C_2, \dots, C_N não se intersectam. Seja R o conjunto que se obtém da região delimitada por C retirando o interior de cada uma das regiões limitadas pelas curvas C_1, C_2, \dots, C_N . Se f é uma função analítica em R , então

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{C_N} f(z) dz.$$



8.3 Fórmula integral de Cauchy

Exemplo 8.7 Seja C uma curva fechada e simples, percorrida no sentido positivo e que envolve o ponto z . Então, de acordo com o Corolário 8.4 temos

$$\oint_C \frac{1}{\xi - z} d\xi = \oint_{|\xi - z|=1} \frac{1}{\xi - z} d\xi$$

e pela definição (usando o caminho $\xi(t) = z + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$\begin{aligned} \oint_{|\xi - z|=1} \frac{1}{\xi - z} d\xi &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\xi(t) - z} \xi'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= i2\pi \end{aligned}$$

Da mesma forma, para $n \neq 1$

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{(\xi - z)^n} d\xi &= \oint_{|\xi - z|=1} \frac{1}{(\xi - z)^n} d\xi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\xi(t) - z)^n} \xi'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{int}} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt \\ &= i \left[\frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)} \right]_0^{2\pi} = i \frac{e^{i(1-n)2\pi} - 1}{i(1-n)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Temos portanto o seguinte resultado:

$$\oint_C \frac{1}{\xi - z} d\xi = i2\pi$$

se C é uma curva fechada simples, percorrida no sentido positivo e que envolve o ponto z . Nestas mesmas condições, com f uma função analítica na região delimitada por C e para $\delta > 0$ pequeno, temos:

$$\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \oint_{|\xi - z|=\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \simeq f(z) \oint_{|\xi - z|=\delta} \frac{1}{\xi - z} d\xi = i2\pi f(z).$$

Para tornar rigoroso este raciocínio devemos considerar a próxima proposição que envolve a seguinte definição:

Definição 8.2 Seja $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ (com $a < b$) um caminho seccionalmente regular, $C = z([a, b])$ e φ uma função **real** de variável complexa definida e em C . Então sempre que o lado direito da seguinte expressão existir como um número real dizemos que φ é integrável sobre C e escrevemos

$$\int_C \varphi(z) |dz| = \int_a^b \varphi(z(t)) |z'(t)| dt$$

Observação 8.1 Esta definição coincide com a definição de integral de linha de um campo escalar definido em \mathbb{R}^2 , identificando naturalmente φ com um tal campo: $z = x + iy$, $\varphi(z) = \varphi(x, y)$,

$$\int_a^b \varphi(z(t)) |z'(t)| dt = \int_a^b \varphi(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Portanto $\int_C 1 |dz| =$ comprimento do arco C .

Proposição 8.6 Seja $C \subset \mathbb{C}$, uma curva seccionalmente regular e f uma função complexa de variável complexa definida e integrável em C . Então

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|$$

Demonstração. Usando uma parametrização (seccionalmente regular) $z(t)$ de C temos

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(z(t)) |z'(t)| dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt = \int_C |f(z)| |dz| \end{aligned}$$

■

Teorema 8.7 (Fórmula integral de Cauchy) *Seja C uma curva seccionalmente regular, simples e fechada, percorrida no sentido positivo. Considere-se f uma função analítica na região delimitada pela curva C e $z \in \mathbb{C}$ um ponto interior a esta região. Então*

$$\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = i2\pi f(z).$$

Demonstração. *Seja $\delta > 0$, suficientemente pequeno tal que a circunferência $|\xi - z| = \delta$ esteja contida na região delimitada pela curva C .*

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - i2\pi f(z) &= \oint_C \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \\ &= \oint_{|\xi - z| = \delta} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi, \end{aligned}$$

onde se usou o Corolário 8.4 e portanto a hipótese de f ser analítica. Estimando o lado direito da igualdade acima temos:

Seja $\varepsilon > 0$ e tome-se $\delta > 0$ tal que (este δ existe porque f é contínua)

$$|\xi - z| \leq \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(z)| \leq \varepsilon$$

então

$$\begin{aligned} \left| \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - i2\pi f(z) \right| &\leq \oint_{|\xi - z| = \delta} \left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| |d\xi| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\delta} \oint_{|\xi - z| = \delta} |d\xi| = \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\delta} 2\pi\delta = \varepsilon 2\pi \end{aligned}$$

Fazendo ε tender para zero concluímos resultado pretendido. ■

Exemplo 8.8 *Sendo C a circunferência de raio unitário centrada na origem, temos pela fórmula integral de Cauchy²*

$$\oint_C \frac{z^2}{z - \frac{1}{2}} dz = i2\pi \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{i\pi}{2},$$

uma vez que a função $f(z) = z^2$ é analítica e o ponto $z = \frac{1}{2}$ é interior ao círculo $|z| \leq 1$.

²Note-se que $\oint_C \frac{z^2}{z - \frac{1}{2}} dz = \oint_C \frac{\xi^2}{\xi - \frac{1}{2}} d\xi$.