9 ª Aula 2004.10.01 AMIV LEAN, LEC Apontamentos

(Ricardo.Coutinho@math.ist.utl.pt)

9.1 Fórmulas integrais de Cauchy

Provamos na última aula o seguinte resultado:

$$\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = i2\pi f(z)$$

se C é uma curva fechada simples, percorrida no sentido positivo, que *envolve o ponto* z e se f é uma função analítica na região delimitada por C .

Esta fórmula mostra que para conhecer uma função analítica em toda a região delimitada por uma curva fechada basta conhecer como ela é sobre a curva. Então, se z e $z+h$ estão no interior da região delimitada por C, obtemos

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= \frac{1}{i2\pi} \oint_C f(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z - h} - \frac{1}{\xi - z} \right) d\xi \\ &= \frac{h}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)}\, d\xi, \end{aligned}$$

como

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi = \frac{h}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)^2}\, d\xi$$

obtemos [1]

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi$$

De forma análoga mostra-se que

$$f''(z) = \frac{2}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3}\, d\xi$$

e (por indução) o seguinte teorema[2].

[1] Note-se (para h perto de 0)

$$\begin{aligned} \left| \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)^2}\, d\xi \right| &\leqslant \oint_C \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z - h|\, |\xi - z|^2}\, |d\xi| \\ &\leqslant \oint_C \frac{|f(\xi)|}{(|\xi - z| - |h|)\, |\xi - z|^2}\, |d\xi| \\ &\leqslant \frac{M}{(d - |h|)\, d^2} \oint_C |d\xi| \end{aligned}$$

onde d é a distância de z a C ($d = \min_{\xi \in C} |\xi - z|$) e M é o valor máximo de $|f|$ sobre C ($M = \max_{\xi \in C} |f(\xi)|$).

[2] Definindo $g(z) = \dfrac{1}{\xi - z}$, então $g^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{(\xi - z)^{n+1}}$. Pelo que formalmente as fórmulas obtêm-se umas das outras comutando a integração com a derivação.

Teorema 9.1 (Fórmulas integrais de Cauchy) *Seja C uma curva seccionalmente regular, simples e fechada, percorrida no sentido positivo. Considere-se f uma função analítica na região delimitada pela curva C e $z \in \mathbb{C}$ um ponto interior a esta região. Então (para $n \in \mathbb{N}$)*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi$$

Note-se que se f é analítica em z então existe uma vizinhança V aonde f é analítica e podemos considerar uma curva C em V que envolve z. Então o teorema acima garante que se f é analítica então tem derivadas de todas as ordens; ou seja uma função analítica é indefinidamente diferenciável.

Corolário 9.2 *Se f é analítica então f' também é analítica; uma função analítica é indefinidamente diferenciável; dada uma função analítica $f(z)$, a sua derivada ordem n, $f^{(n)}(z)$, existe e é uma função analítica.*

Corolário 9.3 *Se u e v são respectivamente as partes real e imaginária de uma função analítica $f = u + iv$, então u e v têm derivadas parciais de todas as ordens (sendo, portanto, contínuas).*

Demonstração. *Para uma função analítica*

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u + iv)$$

e pelas equações de Cauchy-Riemann.

$$f' = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}(u + iv).$$

Pelo Corolário 9.2 e aplicando n vezes o operador $\frac{\partial}{\partial x}$ vem

$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + i\frac{\partial^n v}{\partial x^n},$$

pelo que as derivadas parciais $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$ e $\frac{\partial^n v}{\partial x^n}$ existem são continuas. Mas podemos também aplicar $n-k$ vezes o operador$\frac{\partial}{\partial x}$ e k vezes o operador $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}$ obtendo-se

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{i^k}\frac{\partial^{n-k} u}{\partial x^{n-k}\partial y^k} + \frac{1}{i^{k-1}}\frac{\partial^{n-k} v}{\partial x^{n-k}\partial y^k},$$

para qualquer natural n e k tais que $0 \leqslant k \leqslant n$. Concluí-se então que todas as derivadas parciais de u e v existem e são contínuas. ■

Exemplo 9.1 (de aplicação das fórmulas integrais de Cauchy) *Considere-se $f(\xi) = e^{2\xi}$, $n = 4$, $f^{(4)}(\xi) = 2^4 e^{2\xi}$*

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^5} \, dz &= \oint_{|\xi|=1} \frac{e^{2\xi}}{(\xi - 0)^5} \, d\xi \\ &= \frac{i2\pi}{4!} \left[2^4 e^{2\xi}\right]_{\xi=0} \\ &= \frac{i2\pi}{2.3.4} 4^2 \\ &= \frac{i4\pi}{3} \end{aligned}$$

Teorema 9.4 (Teorema de Morera) *Seja f uma função complexa de variável complexa contínua num aberto D, tal que para qualquer curva fechada C contida em D se tenha*

$$\oint_C f(z)\ dz = 0.$$

Então f é analítica em D.

Demonstração. *Seja z_0 um ponto qualquer em D e z um ponto numa vizinhança convexa V de z_0 contida em D. Considere-se $F(z)$ o integral de $f(z)$ ao longo do segmento de recta que une z_0 a (neste sentido), i. e.*

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\xi)\ d\xi.$$

Dado $h \in \mathbb{C}$ tal que $z+h$ ainda pertença à vizinhança (convexa) V, temos de, acordo com a hipótese,

$$\oint_{[z_0,z]+[z,z+h]+[z+h,z_0]} f(\xi)\ d\xi = 0,$$

ou seja

$$\int_{[z_0,z]} f(\xi)\ d\xi + \int_{[z,z+h]} f(\xi)\ d\xi + \int_{[z+h,z_0]} f(\xi)\ d\xi = 0,$$

ou ainda

$$F(z) + \int_{[z,z+h]} f(\xi)\ d\xi - F(z+h) = 0.$$

Portanto

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\xi)\ d\xi$$

Dado $\varepsilon > 0$, como f é contínua em z, seja $\delta > 0$ tal que $|\xi - z| < \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$. Então

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| &= \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]} f(\xi)\ d\xi - f(z)\int_{[z,z+h]} d\xi\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|h|}\int_{[z,z+h]} |f(\xi) - f(z)|\ |d\xi| \\ &\leqslant \frac{1}{|h|}\varepsilon\int_{[z,z+h]} |d\xi| = \varepsilon\end{aligned}$$

Pelo que $F'(z) = f(z)$, concluindo-se que $F(z)$ é analítica em V. Então, de acordo com o Corolário 9.2, f é analítica porque é a derivada de uma função analítica. ■

9.2 Funções Harmónicas

Definição 9.1 *Uma função real u definida num aberto D de $\mathbb{R}^2$ é uma* ***função harmónica*** *se $u \in C^2(D,\mathbb{R})$ e*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Designando por u e v, respectivamente, as partes real e imaginária da função $f = u + iv$, a equivalência entre funções analíticas e funções harmónicas é estabelecida nas seguintes afirmações:

- $f = u + iv$ analítica $\Rightarrow$ u harmónica (e também v harmónica)

  Se $f = u + iv$ é analítica então, pelo Corolário 9.3, $u, v \in C^2$ e temos as equações de Cauchy Riemann:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} & \underset{\frac{\partial}{\partial x}}{\Rightarrow} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} & \underset{\frac{\partial}{\partial y}}{\Rightarrow} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{array}$$

  Pelo teorema de Schwarz, sendo $u \in C^2$, temos $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$; pelo que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Como v é a parte real de $-if$, concluímos que também v é harmónica.

Exemplo 9.2 *De acordo com este resultado podemos garantir, sem calcular derivadas parciais, que a função* $\operatorname{Re}\left(e^{z^2}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{x^2 - y^2 + 2ixy}\right) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$ *é uma função harmónica, porque* e^{z^2} *é uma função analítica (composição das funções analíticas* e^z *e* z^2*).*

- u harmónica $\Rightarrow$ $\exists v : f = u + iv$ analítica.

  Se u é harmónica, então $\left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ é um campo fechado; de facto, como $u \in C^2$, concluímos $\left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \in C^1$ e por outro lado

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

  Então o campo $\left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ é um campo gradiente (localmente ou em conjuntos simplesmente conexos), pelo que existe um potencial $v \in C^1$ (único a menos de uma constante aditiva) tal que $\operatorname{grad} v = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$, ou seja

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

  Concluindo-se que $f = u + iv$ é analítica. A função v assim determinada designa-se por **harmónica conjugada** de u e é única a menos de uma constante aditiva (localmente ou em conjuntos simplesmente conexos).

Exemplo 9.3 *Considere-se a função* $u(x, y) = 3xy^2 - x^3$. *Temos* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x + 6x = 0$. *Portanto* u *é harmónica e existe uma função harmónica conjugada* v *que satisfaz as equações* $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$ *e* $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3y^2 - 3x^2$. *De facto da primeira equação obtemos* $v = -3x^2 y + g_1(y)$ *e da segunda,* $v = y^3 - 3x^2 y + g_2(x)$. *Comparando as últimas expressões concluímos* $g_1(y) - y^3 = g_2(x) =$ *constante (porque o lado esquerdo não depende de* x *e o direito não depende de* y*). Pelo que* $v = y^3 - 3x^2 y$ *a menos de uma constante aditiva(real).*