

(Ricardo.Continho@math.ist.utl.pt)

11.1 Analiticidade das séries de potências

Vamos agora estudar alguns resultados gerais sobre séries de funções uniformemente convergentes que utilizaremos para mostrar que qualquer série de potências é uma função holomorfa (analítica). De facto, uma série de potências é uma série de funções da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$, com $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ pelo que poderemos aplicar os seguintes teoremas a estas séries.

Teorema 11.1 *Se C é uma curva seccionalmente regular, se $\int_C f_n(z) dz$ existe para todo n , se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = f(z)$ é uniformemente convergente em C e se $\int_C f(z) dz$ existe, então*

$$\int_C f(z) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_C f_n(z) dz$$

Demonstração. *Como a convergência é uniforme, dado uma aproximação $\varepsilon > 0$, existe N_0 tal que, para $N > N_0$,*

$$\forall z \in C \quad f(z) = \sum_{n=0}^N f_n(z) + r_N(z), \quad \text{com } |r_N(z)| < \varepsilon.$$

Usando a linearidade do integral, vem

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C \sum_{n=0}^N f_n(z) dz + \int_C r_N(z) dz \\ &= \sum_{n=0}^N \int_C f_n(z) dz + \int_C r_N(z) dz, \end{aligned}$$

donde

$$\left| \int_C f(z) dz - \sum_{n=0}^N \int_C f_n(z) dz \right| = \left| \int_C r_N(z) dz \right| < \int_C |r_N(z)| |dz| < \varepsilon \int_C |dz|.$$

Como $\int_C |dz|$ é o comprimento da curva C (que não depende de N nem de ε) e como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos

$$\int_C f(z) dz = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \int_C f_n(z) dz$$

■

Teorema 11.2 Se D é um conjunto aberto do plano complexo, se as funções $f_n(z)$ são analíticas em D e se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = f(z)$ é uniformemente convergente em D , então

$$f(z) \text{ é analítica em } D \quad e \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(z)$$

($k \in \mathbb{N}$)

Demonstração. Primeiro mostra-se que $f(z)$ é contínua pelo argumento clássico $\delta/3$. (É a mesma demonstração da para o caso de funções reais de variável real. Se as funções $f_n(z)$ são contínuas em D e se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = f(z)$ é uniformemente convergente em D , então $f(z)$ é contínua em D)

Considere-se um círculo $V \subset D$. Pelo Teorema 11.1¹ e pelo Teorema de Cauchy (Teor. 8.2) temos, para qualquer curva fechada em V ,

$$\oint f(z) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \oint f_n(z) dz = 0.$$

Então pelo Teorema de Morera (Teor. 9.4) concluímos que f é analítica em V . Posto isto, dado $z \in D$, V um disco aberto que contém z e está contido em D , e C uma curva fechada que envolve z no sentido positivo e está contida em V ,



vem pelas fórmulas integrais de Cauchy e pelo Teorema 11.1 que

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \frac{k!}{i2\pi} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k!}{i2\pi} \oint_C \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(z). \end{aligned}$$

■

Teorema 11.3 Uma função definida por uma série de potências é analítica no interior da seu círculo de convergência. Nessa região a série pode ser derivada termo a termo.

Demonstração. Seja R o raio de convergência e z_0 o seu centro. Dado z tal que $|z - z_0| < R$, seja r tal que $|z - z_0| < r < R$. Pelo Teorema 10.2 a série é uniformemente convergente no círculo de raio r e centro em z_0 , então pelo teorema anterior (Teor. 11.2) temos que a função é analítica nesse círculo, e portanto em z , e que podemos derivar a série termo a termo nesse ponto. ■

¹Os integrais existem porque tanto $f_n(z)$ como $f(z)$ são funções contínuas.

11.2 Série de Taylor

Do teorema anterior concluímos que uma série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

convergente no interior do seu círculo de convergência $|z - z_0| < R$, onde R , o raio de convergência é calculado por

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

pode ser derivada termo a termo. Obtemos então,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2 (z - z_0) + 3a_3 (z - z_0)^2 \dots$$

e $f'(z_0) = a_1$. Do mesmo modo, para a segunda derivada vem

$$\begin{aligned} f''(z) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n (z - z_0)^{n-2} \\ &= 2a_2 + 6a_3 (z - z_0) + 12a_4 (z - z_0)^2 \dots \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n!}{(n-2)!} a_n (z - z_0)^{n-2} \end{aligned}$$

e $f''(z_0) = 2a_2$. Por indução concluímos

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k} \\ &= k!a_k + (k+1)!a_{k+1} (z - z_0) + \frac{(k+2)!}{2!} a_{k+2} (z - z_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

Fazendo $z = z_0$, obtemos $f^{(k)}(z_0) = k!a_k$, ou seja

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Vamos ver agora que qualquer função analítica é (localmente) uma série de potências.

Teorema 11.4 (Série de Taylor) *Seja f uma função complexa de variável complexa, z_0 um número complexo e r_0 um real positivo ou $+\infty$. Se a função f é analítica no círculo $|z - z_0| < r_0$, então para qualquer z neste círculo temos*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Demonstração. Seja z tal que $|z - z_0| < r_0$ e r_1 tal que $|z - z_0| < r_1 < r_0$. Pela fórmula integral de Cauchy vem

$$f(z) = \frac{1}{i2\pi} \oint_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Para ξ tal que $|\xi - z_0| = r_1$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

porque

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r_1} = r < 1$$

Pelo critério de Weierstrass a série obtida é uniformemente convergente em $|\xi - z_0| = r_1$. Portanto (de acordo com o Teorema 11.1)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{i2\pi} \oint_{|\xi - z_0| = r_1} f(\xi) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \\ &= \frac{1}{i2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \oint_{|\xi - z_0| = r_1} f(\xi) \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{i2\pi} \oint_{|\xi - z_0| = r_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

onde se aplicaram as fórmulas integrais de Cauchy.

■

Percebemos agora porque é que a função $\frac{1}{1+x^2}$ que é infinitamente diferenciável em \mathbb{R} e função $\frac{1}{1+x}$ que não é limitada numa vizinhança do ponto -1 , têm desenvolvimentos de Taylor de centro em 0 com o mesmo raio de convergência 1 ; no plano complexo tanto a função $\frac{1}{1+z^2}$, quer a função $\frac{1}{1+z}$ tem uma singularidade (ponto aonde a função não é analítica) à distancia de uma unidade do ponto 0 (a função $\frac{1}{1+z^2}$ tem singularidades nos pontos i e $-i$, e a função $\frac{1}{1+z}$ no ponto -1).

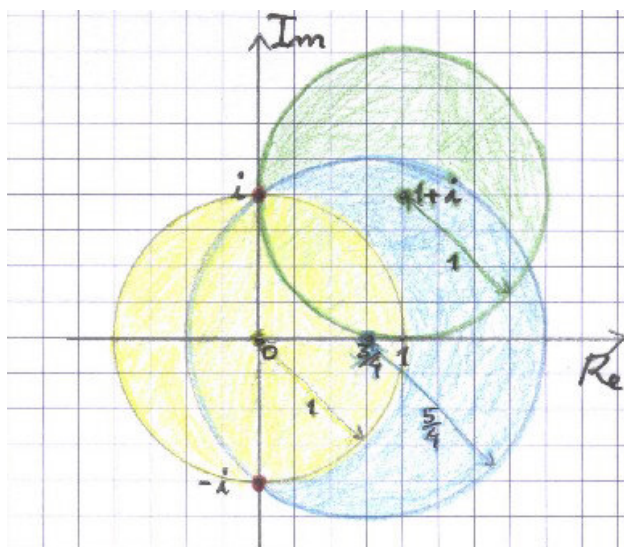
Exemplo 11.1 A função $\frac{1}{1+z^2}$ é analítica em $|z| < 1$ e corresponde à série (porque se trata da série geométrica de razão $-z^2$)

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n},$$

que é, portanto, a sua série de Taylor de centro em 0 (ou série de Maclaurin). Se descobríssemos o valor da série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} = f(z)$, poderíamos apenas afirmar que esta série definia uma função $f(z)$ com domínio $|z| < 1$. Contudo esta informação permitiria calcular todas as derivadas desta função no ponto $z = \frac{3}{4}$, por exemplo, e portanto calcular a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{3}{4}\right)}{n!} \left(z - \frac{3}{4}\right)^n.$$

Esta série tem como raio de convergência $\left|i - \frac{3}{4}\right| = \frac{5}{4}$ (porquê?). Poderíamos então definir de forma natural $f(z)$ como uma função analítica em $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ ou } |z - \frac{3}{4}| < \frac{5}{4}\}$. Poderíamos agora calcular a sua série de Taylor no ponto $1+i$, por exemplo, e assim alargar de forma analítica o domínio de $f(z)$ aos pontos $|z - (1+i)| < 1$.



Continuando este processo chegaríamos a uma função analítica definida em $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Portanto mesmo sem saber a expressão elementar para a soma da série, poderíamos estender a função soma de forma analítica a um domínio maximal. A este processo chama-se **continuação analítica**.

O conhecimento de desenvolvimentos em de Taylor em torno do ponto $z_0 = 0$, designados por **séries de Maclaurin**, tem uma importância prática fundamental, pois servem de base ao cálculo de outras séries de Taylor.

Exemplo 11.2 Vamos determinar o desenvolvimento da função $\frac{1}{z^2}$ em torno do ponto $1+i$, com base no conhecimento da série geométrica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= -\frac{d}{dz} \frac{1}{z} \\ &= -\frac{d}{dz} \frac{1}{1+i+z-(1+i)} \\ &= -\frac{d}{dz} \frac{1}{(1+i)} \frac{1}{\left(1 - \frac{1+i-z}{1+i}\right)} \\ &= \frac{-1}{1+i} \frac{d}{dz} \frac{1}{1 - \frac{1+i-z}{1+i}} \end{aligned}$$

Para $|z - 1 - i| < \sqrt{2}$, temos

$$\frac{1}{1 - \frac{1+i-z}{1+i}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+i-z}{1+i} \right)^n.$$

Pelo que, para valores de z no círculo $|z - 1 - i| < \sqrt{2}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} &= \frac{-1}{1+i} \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+i-z}{1+i} \right)^n \\ &= \frac{-1}{1+i} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n(1+i-z)^{n-1}}{(1+i)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(1+i)^{n+2}} (z-1-i)^n. \end{aligned}$$